Modélisation du risque de défaut en entreprise

Diana Dorobantu

THÈSE

présentée pour le diplôme de
docteur de l'Université Toulouse III – Paul Sabatier
en MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

par

Diana Dorobantu

intitulée

Modélisation du risque de défaut en entreprise

soutenue le 14 décembre 2007
devant le jury composé de

M. Pontier	Université Toulouse III	Directeur
L. Coutin	Université Paris V	Directeur
P. Carmona	Université de Nantes	Rapporteur
J.-P. Lepeltier	Université du Maine	Rapporteur
J.-P. Decamps	Université Toulouse I	Examinateur
F. Baudoin	Université Toulouse III	Examinateur

U.M.R. CNRS C 5583,
Laboratoire de Statistique et Probabilités,
Université Paul Sabatier 31062 TOULOUSE Cédex 9

Remerciements

Quel moment plaisant dans la rédaction d'une thèse, que celui où l'on arrive aux "remerciements"... A l'issue de ces trois ans de travaux, le moment est venu, pour moi, de remercier toutes les personnes qui m'ont entouré pour mener à bien ce travail. La liste est longue et je vais essayer de n'oublier personne.

Je suis infiniment reconnaisante envers Monique Pontier et Laure Coutin d'avoir dirigé ma thèse. Je les remercie pour tout le temps qu'elles m'ont consacré, leur gentillesse, leurs encouragements et pour toutes les lectures, relectures et corrections qu'elles ont pu effectuer. Je suis très honorée d'avoir été la première doctorante de Laure Coutin et la dernière de Monique Pontier.

Je remercie les Professeurs Philippe Carmona et Jean-Pierre Lepeltier d'avoir accepté la lourde charge d'être rapporteurs. Les questions et les échanges que nous avons pu avoir m'ont permis d'améliorer mon travail. J'ai été très touchée par l'accueil chaleureux de Jean-Pierre Lepeltier au Mans. Je remercie également Stéphane Villeneuve de m'avoir consacré du temps en commençant de rapporter sur ma thèse.

Je voudrais aussi remercier Jean-Paul Decamps et Fabrice Baudoin d'avoir accepté de participer au jury.

Un énorme merci aux membres du LSP : Serge Cohen de m'avoir presenté à Monique Pontier en septembre 2003, Sébastien Dejean d'avoir répondu à toutes mes questions sur l'informatique (une science qui reste un mystère pour moi), Jean-François Dupuy, Alain Baccini, Cécile Chouquet et Jérémie Bigot pour leur colaboration lors de mon monitorat et également Françoise Michel, Jean-Claude Fort, Nicolas Savy, Djalil Chafai, Clémentine Prieur, Myriam Vimond et tous les doctorants.

Je remercie Caroline Hillairet et Florence de m'avoir hébérgé lors de mes séjours à Paris. Je remercie Anne Eyraud-Loisel de m'avoir invité exposer à Lyon.

Je remercie mon ancien co-bureau Abdelaâti Daouia pour son accueil lors de ma première année de thèse et son amitié, Agnès pour ses conseils et son soutien.

Cette thèse n'aurait pas été la même sans la connaissance de Delphine et Solenn. Je les remercie pour leur soutien. Je n'oublirai pas nos longues conversations "constructives" et les après-midis de badminton.

Je ne serai peut-être pas venue à Toulouse si Anca n'avait pas autant insisté...Je la remercie également d'avoir été à mes côtés dans les bons et les mauvais moments.

Je n'aurais pas pu arriver jusque là sans la chaleur, le soutien et le bonheur dans lequel j'ai vécu. Je remercie mes parents pour leur amour et leur soutien sans bornes. Multumesc mami, tati si Vlad.

Et enfin, un grand merci à celui qui a su supporter les baisses de moral d'un chercheur souvent égaré voir perdu entre deux raisonnements...

Table des matières

Structure du document

Cette thèse est organisée en deux parties, la première traitant quelques problèmes d'arrêt optimal et la deuxième destinée à l'étude de la loi d'un temps d'atteinte d'un processus mixte diffusion-sauts ainsi qu'à quelques exemples d'utilisation de cette loi.

0.1. Introduction générale

Sur un marché financier, les entreprises souhaitent optimiser leurs politiques concernant les versements de dividendes et la proportion d'endettement en présence de risque de faillite. D'autre part, les dirigeants de l'entreprise, les actionnaires ou les investisseurs essaient de "prévoir" la faillite de la firme en fonction de l'information dont ils disposent. Ces agents peuvent observer de façon parfaite ou imparfaite, de manière continue ou à des instants discrets la valeur des actifs de la firme. Cette valeur peut être modélisée par l'intermédiaire d'un processus stochastique à sauts et l'instant de faillite appelé aussi défaut par un temps d'arrêt (qui est souvent un temps d'atteinte).

L'objectif de cette thèse est d'étudier quelques problèmes d'arrêt optimal avec applications à la finance ainsi que la loi d'un temps d'atteinte d'un processus de Lévy à sauts et quelques applications à la finance, plus précisément lors du calcul de l'intensité de ce temps d'atteinte dans trois cas, selon le type d'information dont disposent les agents.

Le problème du contrôle optimal est un sujet qui apparaît souvent dans la littérature de spécialité, ayant de nombreuses applications par exemple dans le marketing [83], l'économie (l'économie des ressources humaines incluse) [9, 70] ou le domaine financier [45]. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser un critère économique. L'état des systèmes dynamiques est modélisé par un processus stochastique, noté V. Souvent l'optimisation est faite par rapport à un instant τ qui est un temps d'arrêt dans la filtration engendrée par le processus V (dans ce cas il s'agit d'un problème d'arrêt optimal, voir par exemple [27, 69]) ou par rapport à un processus croissant intervenant dans la dynamique du processus V, comme dans [38, 71] ou [75]. Certains auteurs optimisent leur problème sur l'ensemble des couples $(\tau,\ C)$ ou $(\tau,\ (M,C))$ où M et C sont deux processus croissants intervenant ou non dans l'évolution du processus V (voir par exemple [22, 23, 34]). D'autres auteurs comme Vath, Pham et Villeneuve [84] ou Korn [48] s'intéressent au problème du contrôle impulsionnel.

Nous nous intéressons dans la première partie de cette thèse à quelques problèmes d'arrêt optimal (ou de contrôle optimal, mais qui peuvent être ramenés à des problèmes d'arrêt optimal) dans le cas des processus à sauts.

On retrouve les problèmes de temps d'arrêt optimal dans le domaine médical [79] ou dans la finance. Parmi d'autres, Leland [58, 59, 60], Duffie et Lando [27] ou Villeneuve [85] ont étudié des problèmes de temps d'arrêt optimal dans le cas d'une diffusion. De plus, d'autres auteurs ont utilisé des processus mixtes diffusion-sauts pour leurs modèles. Par exemple, Hilberink et Rogers [35] ou Kyprianou [52] ont utilisé un processus de Lévy spectral négatif (sans sauts positifs) et Le Courtois et Quittard-Pinon [20] des processus de Lévy stables (des processus de sauts purs, sans partie diffusion). Les processus mixtes diffusion-sauts, lorsque les sauts sont de loi double exponentielle, ont été étudiés par Chen et Kou [16], Kou et Wang [49, 50], Dao [21]. Mordecki [69] utilise la loi exponentielle pour les sauts, soit tous positifs soit tous négatifs et Dao [21] étudie un modèle où les sauts sont de loi uniforme.

Trois approches différentes sont utilisées pour la résolution des problèmes d'arrêt optimal : la factorisation Wiener-Hopf (méthode utilisée par Kou et Wang [50], Sepp [80], Yor et Nguyen-Ngoc [87], Boyarchenko et Levendorskii [11, 12]), la méthode de Monte-Carlo utilisée par exemple par Carriere [13], Longstaff et Schwartz [63] et les équations intégro-différentielles (voir par exemple Pham [71, 72], Mordecki [69]).

Dans cette thèse, la première partie est l'étude de quelques problèmes d'arrêt optimal de processus à sauts avec des applications en finance. Nous avons choisi de résoudre un problème particulier de contrôle optimal dans le cas d'un processus de Lévy quelconque. L'optimisation est faite sur l'ensemble de couples (temps d'arrêt, processus croissant), mais le problème peut être ramené à un problème de temps d'arrêt optimal. Sans nous restreindre a priori à une classe particulière de temps d'arrêt comme dans [16] ou [27], nous proposons une méthode qui démontre que le temps d'arrêt optimal est un temps d'atteinte et qui permet d'obtenir le seuil optimal. De plus, notre méthode permet d'éviter les longs calculs de l'opérateur intégro-différentiel utilisé dans les preuves habituelles (chapitre 1). Nous nous intéressons également à des problèmes plus généraux de temps d'arrêt optimal dans le cas d'un processus de Feller quelconque. Dans ce cas les problèmes sont plus compliqués et le temps d'arrêt optimal n'est pas forcément un temps d'atteinte (chapitre 2). Nous finissons cette partie avec une application à la finance (chapitre 3) et le rappel de quelques résultats classiques de contrôle optimal (chapitre 4).

Les économistes portent un intérêt particulier à la loi d'un temps d'atteinte d'un processus quelconque : en effet, dans le domaine financier l'instant de faillite d'une entreprise est souvent modélisé par le premier temps d'atteinte d'une certaine barrière du processus stochastique (qui représente la valeur des actifs de l'entreprise). Cette barrière peut être constante ou non. Les lois de temps d'atteinte d'un seuil constant de différents processus ont été étudiées au long des années. Nous rappelons ici quelques auteurs qui ont calculé la loi d'un temps d'atteinte de divers processus : Karatzas et Shreve [44] (mouvement brownien avec drift), Leblanc [57] ou Alili, Patie et Petersen [1] (processus de Ornstein-Uhlenbeck), Borodin et Salminen [10] (processus de Bessel). Blanchet [8] calcule la fonction de répartition d'un processus à sauts vérifiant l'équation stochastique suivante : $dS_t = S_{t^-}(\mu dt + \sigma \mathbf{1}_{\phi(t)=0} dW_t + \phi \mathbf{1}_{\phi(t)=\phi} d\tilde{N}_t),\ t \geq T$ où T est un horizon fini, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\phi(.)$ une fonction prenant les valeurs 0 ou ϕ, W est un mouvement brownien, N un processus de Poisson d'intensité $\frac{1}{\phi^2}\mathbf{1}_{\phi(t)=\phi}$ et $\tilde{N}$ est le processus de Poisson compensé. Dans la deuxième partie de cette thèse nous étudions la loi du temps d'atteinte d'un seuil constant par un processus de Lévy à sauts.

Depuis Bachelier en 1900 [2] jusqu'à Black, Scholes et Merton [6, 7, 67] en 1972-1973, et par suite dans la plupart des problèmes de calcul stochastique appliqués à la finance, une des hypothèses est l'homogénéité des informations disponibles entre les agents sur le marché. Mais en réalité, les agents disposent d'informations différentes.

Dans la finance, un exemple d'utilisation de la loi d'un temps d'atteinte (représentant l'instant de défaut d'une entreprise) est le calcul de son intensité associée à une certaine filtration représentant l'information dont disposent les agents sur le marché. Ce type d'étude a été initié par Pye [74] et Litterman et Iben [62] et ensuite formalisé indépendamment par Jarrow et Turnbull [39], Jarrow, Lando et Turnbull [40], Lando [54], Madan et Unal [66]. Cette approche a été développée par Hull et White [36], Duffie et Singleton [28], Lando [55, 56], Lotz [64, 65]... Les outils mathématiques qui sont à la base d'une telle étude ont été introduits par Dellacherie [24], Chou et Meyer [17], Dellacherie et Meyer [26], Jeulin et Yor [43] et plus tard développés par Jeanblanc et Rutkowski [42], Bielecki et Rutkowski [5]. Dans le modèle de Duffie et Lando [27], la valeur des actifs est modélisée par un mouvement brownien géométrique et les agents du marché ne peuvent observer que de façon imparfaite et à des instants discrets la valeurs des actifs de la firme. Un bruit indépendant est incorporé dans l'observation des agents. En revanche les agents savent si le défaut est survenu ou pas. D'autres auteurs ont proposé différentes méthodes pour démontrer le résultat de Duffie et Lando [27] (voir par exemple Song [82] ou Elliott, Jeanblanc et Yor [29]). Le même modèle, mais avec une observation continue a été étudié par Coculescu [18]. Une autre version du modèle avec observation continue est proposée par Kusuoka [51] ou par Giesecke and Goldberg [32], mais dans le dernier modèle la barrière du temps d'atteinte n'est pas constante. Dans ce modèle, mais aussi dans celui de Lambrecht et Perraudin [53] les agents ne peuvent pas observer la valeur de la barrière, en conséquence ils ne savent pas si le défaut est survenu ou pas. Guo, Jarrow ou Zeng [33] considèrent que la valeur des actifs de l'entreprise est décrite par un processus à sauts positifs X et ils étudient l'intensité du premier temps d'atteinte d'un seuil constant pour deux filtrations différentes : dans le premier cas les agents du marché disposent d'une information parfaite (c'est à dire que la filtration considérée est celle engendrée par le processus X) et dans le deuxième cas les agents observent la valeur des actifs de l'entreprise à des instants discrets et ils savent également si le défaut est survenu ou pas. Dans le modèle de Cetin, Jarrow, Protter et Yildirim [14] le défaut est défini à partir d'un processus continu représentant les cash-flows de l'entreprise. La seule information des agents est le signe de la valeur des cash-flows.

La deuxième partie de cette thèse démontre avec précision que la fonction de répartition du premier temps d'atteinte d'un processus de Lévy V qui est la somme d'un mouvement brownien avec drift et d'un processus de Poisson composé, est dérivable sur $\mathbb{R}_+$, ce qui généralise et précise un résultat de Kou et Chen dans [16] utilisé sans démonstration (chapitre 5). Dans le chapitre 6 nous mettons en évidence quelle est l'intensité de ce temps d'atteinte associée à différentes filtrations correspondant à différents types d'information des agents (chapitre 6) : premièrement la filtration est engendrée par le temps d'atteinte, deuxièment elle est engendrée par le processus V et troisièment la filtration est engendrée par le temps d'atteinte et par une information bruitée du signal V.

Première partie .

Arrêt optimal

La première partie de cette thèse est consacrée aux problèmes d'arrêt optimal. Elle est constituée de trois chapitres (plus des appendices dans lesquels nous rappelons les résultats classiques d'arrêt optimal ainsi que d'autres résultats utiles pour la résolution des problèmes considérés dans cette partie). Nous nous intéressons ici à quelques problèmes d'arrêt optimal (ou de contrôle optimal, mais qui peuvent être ramenés à des problèmes d'arrêt optimal) de la forme

$$sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[g(V_\tau)\right], \tag{0.1}$$

$$sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau)\right], \tag{0.2}$$

où V est un processus stochastique, g et $\bar{g}$ deux fonctions boréliennes, $r > 0$ et Δ est l'ensemble des $\mathcal{F}^V_.$-temps d'arrêt ($\mathcal{F}^V_.$ étant la filtration engendrée par le processus V).

L'étude de ces problèmes est motivée par les applications dans plusieurs domaines comme la finance, l'économie ou la médecine.

Dans le domaine financier, on peut considérer que le processus V représente la valeur des actifs d'une firme, la fonction $\bar{g}$ le bénéfice de l'entreprise et τ l'instant de liquidation. Les dirigeants de la firme choisiront l'instant τ qui maximise son bénéfice actualisé attendu, ce qui correspond à la résolution d'un problème d'arrêt optimal du type (0.2).

Dans le domaine médical, les problèmes d'arrêt optimal peuvent être utilisés, par exemple, pour la curiethérapie qui est un procédé de traitement médical se basant sur l'utilisation de sources radioactives placées à l'intérieur du corps du patient. Elle est principalement utilisée pour le traitement de certains types de tumeurs cancéreuses. Ainsi le processus V peut représenter la valeur des implants radioactifs introduits à proximité de la tumeur, la fonction g la dose reçue par la tumeur et τ l'instant de la fin du traitement quand la source est retirée du corps. Les médecins choisiront l'instant τ maximisant la valeur attendue de la dose reçue par la tumeur, ce qui correspond à la résolution d'un problème d'arrêt optimal du type (0.1).

Nous commençons cette partie avec l'étude d'un problème de contrôle optimal dans le cas d'un processus de Lévy quelconque (chapitre 1). De fait nous cherchons à contrôler un processus stochastique V s'écrivant sous la forme $V = ve^X$ où v est une constante strictement positive réelle et X un processus de Lévy. Nous considérons un problème de contrôle optimal du type :

$$esssup_{(C,\tau)\in\mathcal{C}\times\Delta}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(h(V_s)ds - dC_s) \mid \mathcal{F}^V_t\right), \tag{0.3}$$

où $v > 0$, $r > 0$, $\mathcal{F}^V_t = \sigma(V_s,\ s \leq t)$, Δ est l'ensemble des $\mathcal{F}^V_.$-temps d'arrêt, h est une fonction linéaire et $\mathcal{C}$ est l'ensemble des processus strictement croissants positifs qui vérifient $dC_s = c'ds$ avec $c' \geq c > 0$. Nous montrons que dans notre cas particulier le maximum est atteint pour $c' = c$. Ainsi nous sommes ramenés à résoudre un problème de temps d'arrêt optimal du type (0.2). A la différence des études qui se restreignent dès le début à la classe de temps d'atteinte, nous montrons que le temps d'arrêt optimal est nécessairement de la forme $\tau_b = inf\{t \geq 0 : \quad V_t \leq b\}$. En nous inspirant de [81], nous introduisons aussi une suite décroissante de temps d'arrêt presque sûrement finis $(\tau_\varepsilon,\ \varepsilon > 0)$ qui tend vers le temps d'arrêt optimal. Il s'agit des temps d'arrêt ε-optimaux. Nous utilisons ici les résultats classiques de contrôle optimal de [46] et [47]. Nous donnons une justification de la forme de l'enveloppe de Snell, de la convexité de la fonction valeur et de la forme du temps d'arrêt optimal. Le résultat principal est donné par les théorèmes 1.2.17 et 1.2.19 qui permettent de déterminer le seuil optimal. La méthode utilisée ici permet de résoudre le problème d'optimisation dès lors que nous savons calculer la transformée de Laplace du couple $(\tau_b,\ X_{\tau_b})$, c'est à dire $E_v[e^{-r\tau_b + aX_{\tau_b}}]$.

Nous commençons le premier chapitre avec le rappel de la définition d'un processus de Lévy X et de la formule de Lévy-Khitchine (section 1.1). Dans la section 1.2 nous présentons les résultats principaux qui caractérisent le temps d'arrêt optimal et le seuil optimal. Dans les sections 1.3 et 1.4 nous considérons quelques processus de Lévy particuliers (le mouvement brownien, le processus de Poisson, un processus mixte diffusion-sauts dont les sauts sont de loi double-exponentielle, les processus de Lévy à sauts négatifs), nous vérifions que les hypothèses du théorème 1.2.17 ou du théorème 1.2.19 sont vérifiées et nous résolvons le problème (0.3) dans chaque cas.

Dans le deuxième chapitre nous nous plaçons dans un cadre plus général et nous étudions des problèmes d'arrêt optimal pour des processus de Feller et des fonctions quelconques. Dans ce chapitre nous cherchons à contrôler un processus stochastique V s'écrivant sous la même forme que dans le premier chapitre, mais ici X est un processus de Feller non nécessairement de Lévy. Nous étudions les problèmes d'arrêt optimal de la forme (0.1) et (0.2).

Dans ce cas le problème est plus compliqué et contrairement au premier chapitre, les plus petits temps d'arrêt optimaux des problèmes considérés ne sont pas forcément des temps d'atteinte. Nous commençons ce chapitre en rappelant la définition d'un processus de Feller et en introduisant les notations utilisées tout au long du chapitre (section 2.1). Nous continuons avec la présentation des principaux résultats sur les plus petits temps d'arrêt optimaux (section 2.2). Dans la section suivante (section 2.3), nous étudions le cas où les plus petits temps d'arrêt optimaux des problèmes (0.1) et (0.2) sont infinis. En nous inspirant de [85], nous présentons un exemple pour lequel le temps d'arrêt optimal est presque sûrement infini. Dans la dernière section nous nous intéressons à la forme du temps d'arrêt optimal, nous donnons une condition suffisante pour qu'il soit un temps d'atteinte ainsi qu'un exemple (section 2.4.1) et nous finissons avec la caractérisation du seuil optimal (section 2.4.2).

Dans le troisième chapitre nous présentons une application des problèmes de contrôle optimal dans le domaine financier. Dans le modèle présenté, le processus V est un cas particulier de processus stochastique à sauts négatifs et représente la valeur des actifs d'une entreprise. Le problème considéré (section 3.1) est un problème de temps d'arrêt ; nous cherchons l'instant optimal de faillite qui minimise la valeur de la dette d'une entreprise qui émet des obligations, ce qui correspond au problème suivant :

$$inf_{\tau\in\Delta}\mathbb{E}_{V_0}\left(\int_0^\tau e^{-rs}dC_s + e^{-r\tau}V_\tau^a\right) \tag{0.4}$$

où $r > 0$, $a \in]0,1[$, Δ est l'ensemble des $\mathcal{F}_\cdot^V$-temps d'arrêt et $C \in \mathcal{C}$ l'ensemble des processus croissants positifs. Nous nous restreignons dans ce modèle à un ensemble particulier $\mathcal{C}$, plus précisement aux processus vérifiant $dC_s = e^{ms}ds,\ s \geq 0,\ m \geq 0$. Les résultats classiques de contrôle optimal rappelés dans le chapitre 4 ne s'appliquent pas directement et nous sommes obligés d'introduire un processus intermédiaire ν (section 3.2). Nous terminons ce chapitre avec la forme du temps optimal de faillite, sa loi ainsi que la valeur de la dette (sections 3.3 et 3.4).

Nous finissons cette partie (chapitre 4) avec le rappel des résultats utiles (tirés de [26, 47, 81]) pour la résolution des problèmes d'arrêt optimal étudiés dans les trois premiers chapitres.

1. Processus de Lévy et fonctions affines

Dans ce chapitre nous étudions un problème de contrôle optimal dans le cas d'un processus de Lévy quelconque, problème qui peut être ramené à un problème de temps d'arrêt optimal. Après avoir introduit les définitions et les notations utilisées au long de ce chapitre (section 1.1), sans se restreindre a priori à une classe particulière de temps d'arrêt, nous proposons une méthode pour trouver la forme du temps d'arrêt optimal, qui sera un temps d'atteinte, ainsi que pour calculer le seuil optimal (section 1.2). Nous finissons ce chapitre avec la résolution explicite du problème de contrôle optimal étudié dans le cas de processus de Lévy particuliers : le mouvement brownien, le processus de Poisson, un processus mixte diffusion-sauts dont les sauts sont de loi double-exponentielle d'une part (section 1.3), les processus de Lévy à sauts négatifs d'autre part (section 1.4).

1.1. Définitions et notations

Nous rappelons la définition d'un processus de Lévy conformément à [52].

Définition 1.1.1 *(Définition 1.1 page 2 de [52])*

On appelle processus de Lévy, un processus X défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et qui satisfait les propriétés suivantes :
1. X est un processus càd-làg.
2. $\mathbb{P}(X_0 = 0) = 1$.
3. Pour tout $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ a la même loi que X_{t-s}.
4. Pour tout $0 \leq s \leq t$, $X_t - X_s$ est indépendant de $\{X_u : u \leq s\}$.

D'après la formule de Lévy-Khitchine (voir, par exemple, chapitre 1 de [4] ou de [52]) la fonction caractéristique de X est donnée par

$$\mathbb{E}(e^{i\lambda X_t}) = e^{-t\Psi(\lambda)}$$

où $\lambda \in \mathbb{R}$ et d'après le théorème 1 page 13 de [4] la fonction $\Psi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est de la forme

$$\Psi(\lambda) = -i\mu\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + \int_{\mathbb{R}} (1 - e^{i\lambda x} + i\lambda x \mathbf{1}_{|x|<1})\Pi(dx)$$

avec $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et Π une mesure sur $\mathbb{R}^*$ vérifiant $\int(1 \wedge |x|^2)\Pi(dx) < \infty$.

Dans la suite nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel nous considérons V un processus stochastique s'écrivant sous la forme

$$V = ve^X$$

où v est une constante strictement positive réelle et X est un processus de Lévy.

Afin d'enlever l'ambiguïté, nous utiliserons parfois la notation $V^v = ve^X$, pour tout $v > 0$. Dans la suite $\mathbb{E}(.|V_0 = v)$ est noté $\mathbb{E}_v(.)$.

Hypothèse 1.1.2 $\mathbb{E}_v(V_t) < \infty$ *pour tout* $t \geq 0$.

La condition $\mathbb{E}_v(V_t) < \infty$ est équivalente à $\mathbb{E}(e^{X_t}) < \infty$ qui est encore équivalente, d'après le théorème 3.6 page 76 de [52], à la condition $\int_{|x|\geq 1} e^x \Pi(dx) < \infty$. De plus $\mathbb{E}(e^{X_t})$ est de la forme $\mathbb{E}(e^{X_t}) = e^{t\psi(1)}$ et $\mathbb{E}_v(V_t) = ve^{t\psi(1)}$.

L'hypothèse 1.1.2 est vérifiée, par exemple, dans le cas où X est un mouvement brownien ($\Pi = 0$ et $\psi(1) = \frac{1}{2}$) ou un processus de Lévy avec des sauts négatifs (dans ce cas, d'après [4] chapitre 7, la transformée de Laplace de X existe, la fonction Ψ peut être définie aussi sur les complexes de partie imaginaire négative et $\psi(1) = -\Psi(-i)$). En revanche, si X est un processus de Poisson composé de la forme $X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geq 0$ avec $(N_t,\ t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité constante positive et $(Y_i,\ i \in \mathbb{N})$ une suite des variable aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1, alors l'hypothèse 1.1.2 n'est pas vérifiée. En effet $\mathbb{E}_v(V_t) = v\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}\right) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{E}\left(e^Y\right)^n \frac{e^{-at}(at)^n}{n!} \geq \mathbb{E}\left(e^Y\right) e^{-at}at$. Or $\mathbb{E}\left(e^Y\right) = \int_0^\infty e^x e^{-x} dx = \infty$, d'où $\mathbb{E}_v(V_t) = \infty$.

1.2. Le problème de contrôle optimal

Nous introduisons $\mathcal{F}^V$ la filtration complétée càd, engendrée par le processus V, $\mathcal{F}_t^V = \sigma(V_s,\ s \leq t)$ et nous considérons le problème de contrôle optimal suivant :

$$esssup_{c'\geq c} esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t} \mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c')ds \mid \mathcal{F}_t^V\right). \tag{1.1}$$

où $v > 0$, $r > 0$, $\alpha > 0$, Δ est l'ensemble des $\mathcal{F}_.^V$-temps d'arrêt et $c' \geq c > 0$.

Définition 1.2.1 *On appelle stratégie optimale au temps* t *un couple* (τ_t^*, c^*) *qui maximise (1.1), c'est à dire*

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{\tau_t^*} e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c^*)ds \mid \mathcal{F}_t^V\right] = esssup_{c'\geq c} esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c')ds \mid \mathcal{F}_t^V\right].$$

Proposition 1.2.2 *Les deux esssup de (1.1) commutent et*

$$esssup_{c'\geq c} esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c')ds \mid \mathcal{F}_t^V\right) \text{ est égal à}$$

$$esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c)ds \mid \mathcal{F}_t^V\right).$$

Preuve

Pour simplifier l'écriture on considère $t = 0$ (mais les calculs sont vrais pour tout $t \geq 0$). Soit $F : \mathbb{R}_+ \times [c, \infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par :

$$F(\tau, c') = \mathbb{E}_v\left(\int_0^\tau e^{-rs}(\alpha V_s - c')ds\right).$$

La fonction $c' \mapsto F(\tau, c')$ est décroissante et

$$esssup_{c'\geq c} F(\tau, c') = F(\tau, c). \tag{1.2}$$

D'une part,

$$esssup_{c'\geq c} esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c') \geq esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c) \tag{1.3}$$

et d'autre part, comme la fonction $c' \mapsto F(\tau, c')$ est décroissante, alors pour tout $c' \geq c$, $F(\tau, c') \leq F(\tau, c)$, donc $esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c') \leq esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c)$. Or cette dernière relation est vraie pour tout $c' \geq c$, d'où

$$esssup_{c'\geq c} esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c') \leq esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c). \tag{1.4}$$

Ainsi dans les relations (1.3) et (1.4) on a égalité. On conclut en utilisant la relation (1.2).

$$esssup_{c'\geq c} esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c') = esssup_{\tau\geq 0} F(\tau, c) = esssup_{\tau\geq 0} esssup_{c'\geq c} F(\tau, c').$$

$\square$

D'après la proposition 1.2.2, nous sommes ramenés à résoudre le problème d'arrêt optimal suivant :

$$S_t = esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}\mathbb{E}\left(\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c)ds \mid \mathcal{F}_t^V\right). \tag{1.5}$$

Nous remarquons que pour tout $t \geq 0$, $S_t \geq 0$ car $\tau = t \in \Delta$.

Le même type de problème d'arrêt optimal (1.5) a été étudié par Duffie et Lando dans [27] dans le cas où X est un mouvement brownien avec drift. Ils résolvent le problème à l'aide des équations Hamilton-Jacobi-Bellman.

Hypothèse 1.2.3 $r > \psi(1)$.

Si l'hypothèse 1.2.3 n'était pas vérifiée, alors

$$\mathbb{E}_v\left(\int_0^\infty e^{-rs}(\alpha V_s - c)ds\right) = \alpha v \int_0^\infty e^{-s(r-\psi(1))}ds - c\int_0^\infty e^{-sr}ds = \alpha v \int_0^\infty e^{-s(r-\psi(1))}ds - \frac{c}{r}$$

serait infinie et $\tau^* = \infty$. Cette hypothèse implique la convergence de $\mathbb{E}_v\left(\int_0^A e^{-rs}(\alpha V_s - c)ds\right)$ quand A tend vers ∞.

1.2.1. Le temps d'arrêt optimal

Dans cette partie nous montrons que le problème (1.5) admet au moins un temps d'arrêt optimal et que le plus petit temps d'arrêt optimal est un temps d'atteinte. La démonstration de ce résultat nécessite plusieurs lemmes.

Lemme 1.2.4 *Sous les hypothèses 1.1.2 et 1.2.3, pour tout $\tau \in \Delta$ l'égalité suivante est vraie :*

$$\mathbb{E}\left(\int_\tau^\infty e^{-r(s-\tau)}(\alpha V_s - c)ds \mid \mathcal{F}_\tau^V\right) = \left(\frac{\alpha V_\tau}{r-\theta(1)} - \frac{c}{r}\right) 1_{\{\tau<\infty\}}.$$

Cette espérance a un sens car, sous l'hypothèse 1.2.3, le processus $s \mapsto e^{-rs}(\alpha V_s - c)$ appartient à $L^1(\Omega \otimes \mathbb{R}_+,\ d\mathbb{P} \otimes ds)$.

Preuve
Soit $s \geq 0$. La forme exponentielle du processus $V_.$ permet la factorisation

$$V_s = V_\tau e^{X_s - X_\tau}$$

sur l'ensemble $\{s > \tau\}$.

Or X est un processus de Lévy, donc $X_s - X_\tau$ est indépendant de $\mathcal{F}_\tau^V$ et de même loi que $X_{s-\tau}$ conditionnellement à $\{s > \tau\}$. Ainsi

$$\mathbb{E}\left(\int_\tau^\infty e^{-r(s-\tau)}(\alpha V_s - c)ds \mid \mathcal{F}_\tau^V\right) = \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}} e^{r\tau}\left[\alpha V_\tau \mathbb{E}\left(\int_\tau^\infty e^{-rs} e^{X_s - X_\tau} ds \mid \mathcal{F}_\tau^V\right) - \frac{e^{-\tau r} c}{r}\right].$$

D'où :

$$\mathbb{E}\left(\int_\tau^\infty e^{-r(s-\tau)}(\alpha V_s - c)ds \mid \mathcal{F}_\tau^V\right) = \left(\frac{\alpha V_\tau}{r-\psi(1)} - \frac{c}{r}\right) 1_{\{\tau<\infty\}}.$$

□

En utilisant le lemme 1.2.4, S_t peut être réécrit sous la forme

$$\mathbb{E}\left(\int_t^\infty e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c)ds | \mathcal{F}_t^V\right)$$
$$+ e^{rt} esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t} \mathbb{E}\left[-e^{-r\tau}\mathbb{E}\left(\int_\tau^\infty e^{-r(s-\tau)}(\alpha V_s - c)ds | \mathcal{F}_\tau^V\right) | \mathcal{F}_t^V\right].$$

Cette identité est vraie pour tout $t \geq 0$. D'où

$$S_t = \frac{\alpha V_t}{r-\psi(1)} - \frac{c}{r} + e^{rt} esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t} \mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right) 1_{\tau<\infty} \mid \mathcal{F}_t^V\right] \qquad (1.6)$$

pour tout $t \geq 0$.

Nous sommes ramenés à résoudre le problème d'arrêt optimal suivant :

$$J_t = esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)1_{\tau<\infty} \mid \mathcal{F}_t^V\right]. \tag{1.7}$$

Nous introduisons le processus Y défini par :

Notation 1.2.5 $Y : t \mapsto Y_t = e^{-rt}\left(\frac{-\alpha V_t}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)$.

Lemme 1.2.6 *Sous les hypothèses 1.1.2 et 1.2.3, le processus $Y_.$ converge dans L^1 et presque sûrement et sa limite est $Y_\infty = 0$.*

Preuve
Comme $\mathbb{E}_v(\mid Y_t \mid) \leq \frac{\alpha v}{r-\psi(1)}e^{-(r-\psi(1))t}+\frac{ce^{-rt}}{r}$, on remarque que $Y_t \longrightarrow^{L^1} 0$.
Ce processus s'écrit sous la forme

$$Y_t = -e^{-(r-\psi(1))t}M_t + N_t,\ t\geq 0$$

où M défini par $M_t = \frac{e^{-\psi(1)t}\alpha V_t}{r-\psi(1)}$, $t \geq 0$ est une martingale positive (en effet pour tout $s \leq t$ $\mathbb{E}_v\left(\frac{e^{-\psi(1)t}\alpha V_t}{r-\psi(1)}|\mathcal{F}_s^V\right) = \frac{e^{-\psi(1)t}\alpha V_s}{r-\psi(1)}\mathbb{E}\left(e^{X_t-X_s}|\mathcal{F}_s^V\right) = \frac{e^{-\psi(1)s}\alpha V_s}{r-\psi(1)}$) et N défini par $N_t = \frac{ce^{-rt}}{r}$, $t\geq 0$ est une fonction continue décroissante bornée positive. Ainsi, le processus $Y_.$ est la différence entre une fonction déterministe continue qui tend vers 0 et une surmartingale positive (donc qui converge presque sûrement). Alors le processus $Y_.$ converge presque sûrement quand t tend vers ∞. De plus la limite de Y dans L^1 est égale à 0, donc on a $Y_\infty = 0$ presque sûrement. □

Nous cherchons donc un temps d'arrêt optimal parmi les temps d'arrêt presque sûrement finis. La variable Y_∞ étant nulle presque sûrement, nous pouvons enlever l'indicatrice $1_{\tau<\infty}$ de la relation (1.7).

Remarque 1.2.7 *Nous avons imposé $c > 0$ pour éviter le cas $c = 0$. Remarquons que si $c = 0$, nous sommes ramenés à calculer le sup d'une quantité négative :*

$$esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}\mathbb{E}\left[e^{-r\tau}\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)} \mid \mathcal{F}_t^V\right].$$

Dans ce cas pour tout $t \geq 0$, le temps d'arrêt optimal à l'instant t est $\tau_t^* = \infty$, $J_t = 0$ et la valeur optimale est $S_t = \frac{\alpha V_t}{r-\psi(1)}$.

Nous supposons que le processus Y vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 1.2.8 *Le processus Y est de classe D (c'est à dire que l'ensemble des variables aléatoires Y_τ, $\tau \in \Delta$ est uniformément intégrable).*

Lemme 1.2.9 *Sous les hypothèses 1.1.2 et 1.2.3, une condition suffisante pour que le processus $Y_.$ soit de classe D est*

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right)=0 \tag{1.8}$$

où $R_n = inf\{t \geq 0 : e^{-rt+X_t} \geq n\}$.

Preuve
Le processus Y se met sous la forme $Y_t = \frac{-\alpha v}{r-\psi(1)}e^{-rt+X_t} + \frac{c}{r}e^{-rt},\ t \geq 0$.
La fonction $\left(t \mapsto \frac{e^{-rt}c}{r}\right)$ est positive décroissante et majorée par $\frac{c}{r}$.
Sous les hypothèses 1.1.2 et 1.2.3, le processus $\left(t \mapsto e^{-rt+X_t}\right)$ est une surmartingale positive càd. D'après le théorème 4.1.7 du chapitre 4, la surmartingale positive $t \mapsto e^{-rt+X_t}$ est de classe D si et seulement si

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right)=0$$

où $R_n = inf\{t \geq 0 : e^{-rt+X_t} \geq n\}$. □

C'est cette condition que nous vérifions dans les exemples des sections 1.3 et 1.4.

Le processus $(t \mapsto Y_t,\ t \geq 0)$ étant de classe D, nous pouvons appliquer les résultats de contrôle optimal (voir section 4.1) et d'après le théorème 4.1.1, l'enveloppe de Snell J du processus Y est de la forme $(e^{-rt}s(V_t))_{t\geq 0}$ (avec $J_\infty = 0$ car $Y_\infty = 0$). On note $f(v) = \frac{-\alpha v}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}$; le processus markovien $(S_t)_{t\geq 0}$ peut s'écrire sous la forme $(w(V_t))_{t\geq 0}$ avec w une fonction borélienne positive. Lorsque $\sigma > 0$ le support de la loi de V_t est $\mathbb{R}_+^*$ et la définition (1.6) prise en $t = 0$ donne

$$S_0 = w(v) = -f(v) + sup_{\tau\geq 0}E_v[e^{-r\tau}f(V_\tau)].$$

Or $sup_{\tau\geq 0}E_v[e^{-r\tau}f(V_\tau)] = s(v)$ et la fonction w coïncide avec la fonction

$$v \mapsto -f(v) + s(v). \tag{1.9}$$

La fonction s est une fonction convexe (décroissante) car c'est le sup de fonctions affines (décroissantes) :

$$s(v) = sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right)\right] = sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_1\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha v V_\tau^1}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right)\right].$$

Remarque 1.2.10 *La fonction s étant convexe, elle est donc continue.*

Remarquons que s est une fonction positive puisque

$$s(v) \geq sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-rt}\left(\frac{-\alpha V_t}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right)\right] \geq sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-rt}\frac{-\alpha V_t}{r-\psi(1)}\right] = sup_{t\geq 0}\frac{-\alpha v e^{-(r-\psi(1))t}}{r-\psi(1)} = 0.$$

Nous ne pouvons pas appliquer directement le théorème 4.1.3 de la section 4.1 ; par conséquent nous sommes obligés de réécrire s sous une autre forme. Puisque $Y_t \longrightarrow^{p.s.} 0$, nous avons le résultat suivant qui s'inspire de [85] dont le processus directeur n'est pas un processus de Lévy, mais un processus de diffusion. Dans [85], l'auteur utilise la continuité des trajectoires du processus pour démontrer son résultat. Nous sommes donc obligés de refaire la démonstration, la situation dans notre cas étant différente.

Lemme 1.2.11 *Soit pour* $v > 0$

$$s(v) = sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)\right] \text{ et } s^+(v) = sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)^+\right].$$

Si $\sigma > 0$*, alors sous les hypothèses 1.1.2, 1.2.3 et 1.8,* $s^+(v) > 0$ *et* $s(v) = s^+(v)$ *pour tout* $v > 0$*.*

Preuve
Par construction, pour tout $v > 0$, $s(v) \leq s^+(v)$. Supposons qu'il existe $v_0 > 0$ tel que $s(v_0) < s^+(v_0)$.

Le processus $V_.$ est un processus càd, le processus $Y^+ : t \to Y_t^+ = e^{-rt}\left(\frac{-\alpha V_t}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)^+$ est à valeurs dans $[0, \frac{c}{r}]$, alors les hypothèses du théorème 4.1.3 de la section 4.1 sont vérifiées pour Y^+. On note $f^+(v) = \left(\frac{-\alpha v}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)^+$; le temps d'arrêt

$$\tau^+ = inf\{u \geq 0 : f^+(V_u) = s^+(V_u)\}$$

est le plus petit temps d'arrêt optimal du problème

$$s^+(v) = sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)^+\right].$$

Comme Y converge presque sûrement vers 0, Y^+ converge presque sûrement vers 0 et on a :

$$s^+(v) = \mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau^+}\left(\frac{-\alpha V_{\tau^+}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)^+\right] = \mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau^+}\left(\frac{-\alpha V_{\tau^+}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)^+\mathbf{1}_{\tau^+<\infty}\right].$$

D'après la définition de s et s^+ :

$$\mathbb{E}_{v_0}\left[e^{-r\tau^+}f(V_{\tau^+})\right] \leq s(v_0) < s^+(v_0) = \mathbb{E}_{v_0}\left[e^{-r\tau^+}f^+(V_{\tau^+})\right]$$

et par suite $\mathbb{E}_{v_0}\left[e^{-r\tau^+}\left(f(V_{\tau^+}) - f^+(V_{\tau^+})\right)\right] < 0$, $\mathbb{P}_{v_0}\left(\{\omega : f(V_{\tau^+}) < 0\}\right) > 0$ et
$\mathbb{P}_{v_0}\left(\{\omega : s^+(V_{\tau^+}) = 0\}\right) > 0$.

Donc il existe v_1 tel que $s^+(v_1) = 0$. Alors pour tout temps d'arrêt τ, $\mathbb{P}_{v_1}$-presque sûrement $e^{-r\tau} f^+(V_\tau) = 0$ et en particulier pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f^+(V_t) = 0$. Ceci entraîne que $\mathbb{P}_{v_1}$-presque sûrement $V_t \geq \frac{c(r-\psi(1))}{\alpha r}$ d'où la contradiction puisque la loi de V_t a pour support $\mathbb{R}_+^*$ car $\sigma > 0$ (c'est une conséquence du théorème 24.10 i) page 152 de [78]). Donc $s^+(v) > 0$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+^*$ et $s(v) = s^+(v)$. □

Nous remarquons ici que la condition c strictement positif est nécessaire : si c était nul, alors dans la preuve du lemme 1.2.11, il n'y aurait pas de contradiction.

Remarque 1.2.12 *Nous avons l'égalité $s(v) = s^+(v) > 0$ pour tout $v > 0$.*

Proposition 1.2.13 *Si $\sigma > 0$, alors sous les hypothèses 1.1.2, 1.2.3 et 1.8, il existe au moins un temps d'arrêt optimal pour le problème (1.7).*

Pour tout $c > 0$, il existe $b_c > 0$ tel que le plus petit temps d'arrêt optimal soit de la forme

$$\tau_{b_c} = inf\{t \geq 0 : \ V_t \leq b_c\}.$$

Preuve
D'après le lemme 1.2.11, le problème (1.7) peut se réécrire sous la forme $sup_{\tau \geq 0} E(Y_\tau^+)$. Les hypothèses du théorème 4.1.3 de la section 4.1 sont vérifiées et le temps d'arrêt

$$\tau^* = inf\{u \geq 0 : f^+(V_u) = s^+(V_u)\}$$

est le plus petit temps d'arrêt optimal. Or $s(v) = s^+(v) > 0$ pour tout $v > 0$, d'où

$$\tau^* = inf\{u \geq 0 : f(V_u) = s(V_u)\}$$

est le plus petit temps d'arrêt optimal. La fonction s est majorée par $\frac{c}{r}$ puisque $Y^+_.$ est majoré par $\frac{c}{r}$ et $lim_{v\downarrow 0} s(v) = lim_{v\downarrow 0} f(v) = \frac{c}{r}$. La fonction s étant convexe et f une fonction affine, alors $inf\{v : f(v) < s(v)\}$ est égal à $sup\{v : f(v) = s(v)\}$, que l'on note b_c. En effet, soit $b'_c = sup\{v : f(v) = s(v)\}$ et $b_c = inf\{v : f(v) < s(v)\}$. Remarquons que l'ensemble $\{v : f(v) = s(v)\}$ n'est pas vide puisque $lim_{v\downarrow 0} s(v) = lim_{v\downarrow 0} f(v)$ et b'_c est bien défini. Pour tout $v < b_c$, $f(v) = s(v)$; en particulier $f(b_c - \frac{1}{n}) = s(b_c - \frac{1}{n})$. En faisant tendre n vers l'infini, comme s et f sont continues, alors $f(b_c) = s(b_c)$, d'où $b_c \leq b'_c$. Par continuité, $f(b'_c) = s(b'_c)$. Supposons par l'absurde que $b_c < b'_c$, alors il existe v, $b_c < v < b'_c$ tel que $f(v) < s(v)$. Or s est convexe, donc d'après le lemme des trois cordes

$$\frac{s(v) - s(b_c)}{v - b_c} \leq \frac{s(b'_c) - s(v)}{b'_c - v}, \text{ soit } \frac{s(v) - f(b_c)}{v - b_c} \leq \frac{f(b'_c) - s(v)}{b'_c - v}.$$

Comme $s(v) > f(v)$, alors

$$\frac{f(v) - f(b_c)}{v - b_c} < \frac{s(v) - f(b_c)}{v - b_c} \leq \frac{f(b'_c) - s(v)}{b'_c - v} < \frac{f(b'_c) - f(v)}{b'_c - v},$$

d'où la contradiction puisque $\frac{f(v)-f(b_c)}{v-b_c} = \frac{f(b'_c)-f(v)}{b'_c-v} = \frac{-\alpha}{r-\psi(1)}$. Donc $b_c = b'_c$.

Ceci signifie que le plus petit temps d'arrêt optimal τ^* est aussi le premier temps de passage dans l'intervalle $]0,\ b_c]$. $\square$

Le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (1.7) dépend de la valeur de c et désormais on le note $\tau^*(c)$.

En appliquant le théorème 4.1.2 de la section 4.1, nous obtenons que

$$(t \mapsto e^{-r(t\wedge\tau^*(c))}s(V_{t\wedge\tau^*(c)}),\ t \geq 0) \text{ est une martingale et } Y_{\tau^*(c)} = e^{-r\tau^*(c)}s(V_{\tau^*(c)}).$$

Nous introduisons une nouvelle fonction :

Définition 1.2.14 *Soit $g : \mathbb{R}_+^* \times]0, \frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[\to \mathbb{R}_+^*$ la fonction définie par*

$$g(v,b) = \begin{cases} -\frac{\alpha v}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r} & si\ v \leq b \\ \mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau_b}\left(\frac{-\alpha V_{\tau_b}}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right)\right] & si\ v > b, \end{cases}$$

où $\tau_b = inf\{t \geq 0 : V_t \leq v\}$.

Remarque 1.2.15 *Sous les hypothèses de la proposition 1.2.13, il existe B_c tel que $g(.,B_c) = s(.)$.*

Proposition 1.2.16 *Soit g la fonction introduite dans la définition 1.2.14. Sous l'hypothèse 1.1.2 :*
- *soit il existe un unique b pour lequel la fonction $g(.,b)$ est continue en $v = b$,*
- *soit la fonction $g(.,b)$ est continue en $v = b$ pour tout $b \in]0, \frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[$.*

Preuve
Pour vérifier la continuité de $g(.,b)$ en b on regarde l'équation suivante en b :

$$g(b,b) = lim_{v\downarrow b}g(v,b), \quad \text{soit} \quad -\frac{\alpha b}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r} = lim_{v\downarrow b}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau_b}\left(\frac{-\alpha V_{\tau_b}}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right)\right].$$

On se propose de montrer que cette équation a soit une unique solution, soit tout l'intervalle $]0, \frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[$ comme ensemble de solutions.
Comme $\tau_b = inf\{t \geq 0 :\ V_t^v \leq b\} = inf\{t \geq 0 :\ V_t^1 \leq \frac{b}{v}\} = \tau^1_{\frac{b}{v}}$, alors

$$\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau_b}\left(\frac{-\alpha V_{\tau_b}}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right)\right] = \mathbb{E}_1\left[e^{-r\tau^1_{\frac{b}{v}}}\left(\frac{-\alpha v V^1_{\tau^1_{\frac{b}{v}}}}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}\right)\right].$$

La limite $lim_{v\downarrow b}\mathbb{E}_1\left[e^{-r\tau^1_{\frac{b}{v}}}\left(\frac{-\alpha v V^1_{\tau^1_{\frac{b}{v}}}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)\right]$ existe : on remarque d'abord que $0 < V^1_{\tau^1_{\frac{b}{v}}} \leq \frac{b}{v}$ et par conséquent la quantité qui se trouve sous l'espérance est bornée. Ainsi d'après le théorème de convergence dominée, on peut intervertir la limite et l'espérance. Ensuite comme $0 < \frac{b}{v} < 1$, on peut le considérer de la forme $\frac{b}{v} = 1 - \frac{1}{n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ et quand v décroît vers b (donc quand n tend vers ∞) la suite $\{\tau^1_{1-\frac{1}{n}}\}_{n>0}$ est une suite décroissante de temps d'arrêt. La limite $lim_{v\downarrow b}\tau^1_{\frac{b}{v}}(= lim_{n\to\infty}\tau^1_{1-\frac{1}{n}})$ existe et est égale à $\tau_1' = inf\{t \geq 0 : V^1_t < 1\}$. Ainsi la monotonie de la suite $\{\tau^1_{1-\frac{1}{n}}\}_{n>0}$ implique l'existence de la limite $lim_{v\downarrow b}e^{-r\tau^1_{\frac{b}{v}}}$. Le processus V étant càd, $V^1_{\tau^1_{\frac{b}{v}}}$ tend vers $V^1_{\tau_1'}$ quand v décroît vers b et la limite $lim_{v\downarrow b}e^{-r\tau^1_{\frac{b}{v}}}V^1_{\tau^1_{\frac{b}{v}}}$ existe.

On fait le changement de variable $\frac{b}{v} = x$.

$$
\begin{aligned}
lim_{v\downarrow b}\mathbb{E}_1\left[e^{-r\tau^1_{\frac{b}{v}}}\left(\frac{-\alpha v V^1_{\tau^1_{\frac{b}{v}}}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)\right] &= lim_{v\downarrow b}\mathbb{E}_1\left[e^{-r\tau^1_{\frac{b}{v}}}\left(\frac{-\alpha b\frac{v}{b} V^1_{\tau^1_{\frac{b}{v}}}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)\right] \\
&= lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[e^{-r\tau^1_x}\left(\frac{-\alpha \frac{b}{x} V^1_{\tau^1_x}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi on est ramené à résoudre l'équation suivante :

$$
-\frac{\alpha b}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r} = lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[e^{-r\tau^1_x}\left(\frac{-\alpha \frac{b}{x} V^1_{\tau^1_x}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)\right],
$$

$$
\text{soit} \quad \frac{\alpha b}{r-\psi(1)} lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[1-\frac{e^{-r\tau^1_x}V^1_{\tau^1_x}}{x}\right] = \frac{c}{r} lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau^1_x}\right]. \tag{1.10}
$$

Or

$$
lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left(1-\frac{e^{-r\tau^1_x}V^1_{\tau^1_x}}{x}\right) = lim_{x\uparrow 1}\left[\frac{1}{x}\mathbb{E}_1\left(1-e^{-r\tau^1_x}V^1_{\tau^1_x}\right)+1-\frac{1}{x}\right] = lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left(1-e^{-r\tau^1_x}V^1_{\tau^1_x}\right)
$$

et l'équation (1.10) s'écrit :

$$
\frac{\alpha b}{r-\psi(1)} lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau^1_x}V^1_{\tau^1_x}\right] = \frac{c}{r} lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau^1_x}\right].
$$

On a les deux cas suivants :

- $lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau_x^1}V^1_{\tau_x^1}\right]\neq 0$ et dans ce cas l'équation (1.10) a une unique solution.
- $lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau_x^1}V^1_{\tau_x^1}\right]= 0$.

Comme $V^1_{\tau_x^1}\leq x\leq 1$, alors $1-e^{-r\tau_x^1}V^1_{\tau_x^1}\geq 1-e^{-r\tau_x^1}\geq 0$ et
$\mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau_x^1}V^1_{\tau_x^1}\right]\geq \mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau_x^1}\right]\geq 0$ d'où $lim_{x\uparrow 1}\mathbb{E}_1\left[1-e^{-r\tau_x^1}\right]=0$ et l'équation (1.10) a pour solution tout l'intervalle $]0,\frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[$. □

Nous cherchons le temps d'arrêt optimal dans la famille de temps d'atteinte. Dans la suite, nous proposons une méthode pour le calcul du seuil optimal B_c ; la démarche étant différente, nous énonçons et démontrons deux théorèmes selon les deux cas possibles présentés dans la proposition 1.2.16 : quand la fonction $g(.,b)$ est continue en $v=b$ pour une unique valeur de b ou quand $g(.,b)$ est continue en $v=b$ pour toute valeur de b dans l'intervalle $]0,\frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[$.

Théorème 1.2.17 *Sous les hypothèses 1.1.2, 1.2.3 et 1.8, on suppose que $\sigma>0$ et que la fonction $g(.,b)$ est continue pour tout $b\in]0,\frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[$ et que pour tout $c>0$, il existe $B_c\in]0,\frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[$ tel que :*

(1) L'équation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b)=-\frac{\alpha}{r-\psi(1)}$ a une unique solution notée B_c et l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b)\geq -\frac{\alpha}{r-\psi(1)}$ est $[B_c,\ \infty[$ (où on a noté ∂_d pour la derivée à droite),

(2) La fonction $g(.,B_c)$ est strictement convexe à droite de B_c,

alors le plus petit temps d'arrêt optimal est

$$\tau^*(c)=inf\{t\geq 0 : V_t\leq B_c\}.$$

Remarque 1.2.18 *Le seuil B_c est une fonction de c.*

Preuve

La preuve est faite en deux étapes :
(i) On doit avoir $s(v)\geq f(v)$ pour tout $v\in\mathbb{R}_+^*$ et comme s est de la forme $g(.,b)$, alors cette inégalité impose une contrainte sur b.
(ii) Pour que τ_b soit optimal, puisque s est de la forme $g(.,b)$,

$$s(v)=g(v,b)=\mathbb{E}_v[e^{-r\tau_b}f(V_{\tau_b})]=\mathbb{E}_v[e^{-r\tau_b}s(V_{\tau_b})],$$

il suffit de montrer $g(v,b)\geq\mathbb{E}_v[e^{-r\tau}f(V_\tau)]$ pour tout $\tau\in\Delta$.

1ère étape D'après la définition 1.2.14,

$$g(v,b)=\begin{cases}-\frac{\alpha v}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r} & si\ v\leq b\\ \mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau_b}\left(\frac{-\alpha V_{\tau_b}}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)\right] & si\ v>b.\end{cases}$$

La fonction s est de la forme $g(.,b)$ et est convexe. La fonction f est affine. Alors pour avoir $s(v) \geq f(v)$ il suffit d'imposer

$$\frac{\partial_d s}{\partial v}(b) \geq \frac{\partial f}{\partial v}(b), \text{ soit } \frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) \geq -\frac{\alpha}{r-\psi(1)}.$$

D'après l'hypothèse (1) du théorème, cette relation implique la contrainte suivante sur b : $b \geq B_c$.

2ème étape On raisonne par l'absurde et on suppose que le plus petit temps d'arrêt optimal correspond à un $b > B_c$. Donc :

$$g(v,b) \geq \mathbb{E}_v[e^{-r\tau} f(V_\tau)] \text{ pour tout } \tau \in \Delta. \tag{1.11}$$

Dans (1.11) on prend $\tau = \tau_{B_c}$:

$$g(v,b) \geq \mathbb{E}_v[e^{-r\tau_{B_c}} f(V_{\tau_{B_c}})] = g(v,B_c) \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}_+^*.$$

Prenons $v = b$, alors $g(b,b) = f(b) \geq g(b,B_c)$. Or d'après l'étape 1, $g(b,B_c) \geq f(b)$, d'où $g(b,B_c) = f(b)$. De plus $g(B_c,B_c) = s(B_c) = f(B_c)$ et la fonction $g(.,B_c)$ est continue en B_c. Donc le graphe de $f(.)$, qui est une droite, coupe le graphe de $g(.,B_c)$ aux points d'abcisse b et B_c. Au point d'abcisse B_c le graphe de f est tangent au graphe de $g(.,B_c)$ puisque $\frac{\partial_d g}{\partial v}(B_c,B_c) = -\frac{\alpha}{r-\psi(1)} = f'(B_c)$. Donc sur l'intervalle $[B_c,\ b]$, $g(.,B_c) = f(.)$ ce qui contredit l'hypothèse (2), donc $b = B_c$. D'où le plus petit temps d'arrêt optimal est τ_{B_c}. $\square$

Lorsque la fonction $g(.,b)$ est continue pour une unique valeur de b, alors le seuil optimal B_c est facile à obtenir.

Théorème 1.2.19 *Sous les hypothèses 1.1.2, 1.2.3 et 1.8, on suppose que $\sigma > 0$ et qu'il existe un unique $b \in]0, \frac{(r-\psi(1))c}{r\alpha}[$ (que l'on note B_c) pour lequel la fonction $g(.,b)$ est continue. Alors le plus petit temps d'arrêt optimal est*

$$\tau^*(c) = inf\{t \geq 0 : V_t \leq B_c\}.$$

Preuve
La fonction s est de la forme $g(.,b)$ et est convexe, donc continue. Comme $g(.,b)$ est continue pour une unique valeur de b notée B_c, on en déduit que le seuil optimal est B_c. $\square$

Proposition 1.2.20 *Pour tout $\varepsilon > 0$, soit*

$$\tau_\varepsilon(c) = inf\{t \geq 0 : e^{-rt} s(V_t) \leq e^{-rt} f(V_t) + \varepsilon\}.$$

Si $\sigma > 0$, alors sous les hypothèses 1.1.2, 1.2.3 et 1.8, $P(\tau_\varepsilon(c) < \infty) = 1$ et $lim_{\varepsilon \to 0} \tau_\varepsilon(c) = \tau^*(c)$.

Preuve
Comme $E[sup_{t\geq 0}max(e^{-rt}f(V_t),0)] \leq \frac{c}{r}$, alors d'après le lemme 4.1.5 de la section 4.1,

$$P(\tau_\varepsilon(c) < \infty) = 1.$$

La suite $(\tau_\varepsilon(c), \quad \varepsilon \geq 0)$ est une suite décroissante de temps d'arrêt, donc la limite $\tau_0 = lim_{\varepsilon\to 0}\tau_\varepsilon(c)$ existe et d'après le théorème 4.1.3 de la section 4.1, est égale à $\tau_0 = \tau^*(c)$.
□

1.2.2. La stratégie maximale

Une fois connue la forme du temps d'arrêt optimal, nous pouvons conclure et trouver la stratégie maximale du problème initial (1.1).

Lemme 1.2.21 *Sous les hypothèses 1.1.2, 1.2.3 et 1.8, si $\sigma > 0$, alors la stratégie maximale à l'instant t du problème (1.1) est de la forme*

$$(\tau_{t,b_c}, c)$$

où $\tau_{t,b_c} = inf\{s \geq t : \ V_s \leq b_c\}$.

Preuve
D'après la proposition 1.2.2, dans le problème (1.1) on peut commuter les deux *esssup* et $esssup_{c'\geq c}esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}\mathbb{E}\left[\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c')ds \mid \mathcal{F}_t^V\right]$ est égal à
$esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}\mathbb{E}\left[\int_t^\tau e^{-r(s-t)}(\alpha V_s - c)ds \mid \mathcal{F}_t^V\right]$.

D'après la proposition 1.2.13, à l'instant $t = 0$ le temps d'arrêt optimal est de la forme

$$\tau_{b_c} = inf\{t \geq 0 : \ V_t \leq b_c\}.$$

Comme le modèle est markovien, à tout instant t le temps d'arrêt optimal est de la forme $\tau_{t,b_c} = inf\{s \geq t : \ V_s \leq b_c\}$. □

Application à la finance

Comme nous l'avons déjà précisé dans l'introduction de la première partie, ce type de problème d'optimisation peut être appliqué dans le domaine financier. Ainsi, le processus V représente la valeur des actifs d'une firme, r le taux d'actualisation et $\psi(1) = \frac{1}{t}ln\mathbb{E}\left(\frac{V_t}{V_0}\right)$ le taux attendu de croissance des actifs. Nous supposons qu'à chaque instant t, les actifs de la firme engendrent des cash-flows αV_t, que la firme émet des obligations et que les coupons sont payés indéfiniment (cela veut dire que c' est une vitesse de paiement). La valeur attendue actualisée des cash-flows engendrés par la firme jusqu'à l'instant τ de liquidation sera

$$\mathbb{E}_v \left[\int_0^\tau e^{-rt}(\alpha V_s - c')ds \right].$$

A un instant t fixé, les dirigeants de la firme cherchent la stratégie optimale (instant de liquidation, coupons) qui maximise la valeur attendue actualisée des cash-flows engendrés par la firme jusqu'à τ, ce qui correspond à la résolution du problème de contrôle optimal (1.1).

1.3. Exemples

Les exemples présentés dans cette section, concernent les modèles où nous savons calculer $\mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau_b + aX_{\tau_b}} \right)$. Dans la suite nous considérons quelques processus de Lévy particuliers, nous vérifions que les hypothèses du théorème 1.2.17 ou du théorème 1.2.19 sont vérifiées et nous résolvons le problème (1.1) dans chaque cas. Nous commençons avec un processus de Lévy continu (le mouvement brownien), ensuite nous continuons avec un processus mixte diffusion-sauts dont les sauts sont de loi double-exponentielle et nous finissons avec le processus de Poisson.

1.3.1. Mouvement brownien

Soit $X = W$ où $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard. Donc $V = ve^W$. Dans ce cas $\psi(1) = \frac{1}{2}$ et l'hypothèse 1.1.2 est vérifiée. Nous imposons (l'hypothèse 1.2.3) $r > \frac{1}{2}$.

Lemme 1.3.1 *Le mouvement brownien vérifie la relation (1.8), c'est à dire*

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0 \left(e^{-rR_n + W_{R_n}} \mathbf{1}_{R_n < \infty} \right) = 0$$

où $R_n = inf\{t \geq 0 : e^{-rt+W_t} \geq n\}$. *En conséquent l'hypothèse 1.2.8 est vérifiée.*

La preuve de ce lemme repose sur le résultat suivant de [44] page 197 :

Lemme 1.3.2 *Soit* $(W_t,\ t \geq 0)$ *un mouvement brownien standard et* T_y *le temps d'arrêt défini par* $T_y = inf\{t \geq 0 : \mu t + W_t = y\}$ *avec* $y \neq 0$ *et* $\mu \neq 0$. *Alors*

$$\mathbb{P}(T_y < \infty) = e^{\mu y - |\mu y|}.$$

Preuve du lemme 1.3.1
Le processus W étant continu,

$$R_n = inf\{t \geq 0 : e^{-rt+W_t} = n\} = inf\{t \geq 0 : -rt + W_t = ln(n)\}.$$

Ainsi $\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+W_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = n\mathbb{P}_0\left(R_n<\infty\right).$

On applique le lemme 1.3.2 à $\mu = -r$ et $y = ln(n)$,

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+W_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = ne^{-2rln(n)} = n^{1-2r}.$$

Or $r > \frac{1}{2}$, donc $lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+W_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = 0.$ □

Les hypothèses de la proposition 1.2.13 sont vérifiées et le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme

$$\tau_{b_c} = inf\{t \geq 0:\ V_t \leq b_c\} = inf\{t \geq 0:\ V_t = b_c\}$$

puisque V est un processus continu.

En utilisant la remarque 8.3 page 96 de [44] qui donne la transformée de Laplace d'un temps d'atteinte dans le cas d'un mouvement brownien, la fonction g est de la forme

$$g(v,b) = \begin{cases} -\frac{\alpha v}{r-\frac{1}{2}} + \frac{c}{r} & si\ v \leq b \\ \left(\frac{-\alpha b}{r-\frac{1}{2}} + \frac{c}{r}\right)\left(\frac{v}{b}\right)^{-\sqrt{2r}} & si\ v > b. \end{cases}$$

Nous remarquons que la fonction $v \mapsto g(v,b)$ est continue pour toute valeur de b. Vérifions les hypothèses du théorème 1.2.17 :

(1) L'équation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) = -\frac{\alpha}{r-\frac{1}{2}}$, soit $\left(\frac{-\alpha b}{r-\frac{1}{2}} + \frac{c}{r}\right)\frac{-\sqrt{2r}}{b} = -\frac{\alpha}{r-\frac{1}{2}}$ a une unique solution $B_c = \frac{c\sqrt{2r}(r-\frac{1}{2})}{\alpha r(\sqrt{2r}+1)} \in]0, \frac{c(r-\frac{1}{2})}{r\alpha}[$. De plus l'ensemble des solutions de l'inéquation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) \geq -\frac{\alpha}{r-\frac{1}{2}}$ est $[B_c,\ \infty[$.

(2) On remarque que à droite de b la fonction $g(.,b)$ est $\mathcal{C}^2$. Pour $b = B_c$ la seconde dérivée est égale à

$$\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(v,B_c) = \left(\frac{-\alpha B_c}{r-\frac{1}{2}} + \frac{c}{r}\right)\frac{\sqrt{2r}(\sqrt{2r}+1)}{B_c^2}\left(\frac{v}{B_c}\right)^{-\sqrt{2r}-2} = \frac{c\sqrt{2r}}{rB_c^2}\left(\frac{v}{B_c}\right)^{-\sqrt{2r}-2} > 0$$

et la fonction $g(.,B_c)$ est strictement convexe à droite de B_c.

Ainsi le temps d'arrêt optimal est

$$\tau^*(c) = inf\{t \geq 0:\ V_t = B_c\}.$$

Proposition 1.3.3 *Si X est un mouvement brownien, alors avec les notations introduites dans la section 1.3.1,*
1) Le plus petit temps d'arrêt optimal est $\tau^*(c) = inf\{t \geq 0:\ V_t = B_c\}$ où $B_c = \frac{c\sqrt{2r}(r-\frac{1}{2})}{\alpha r(\sqrt{2r}+1)}$.

2) La stratégie maximale est $(\tau^*(c), c)$.
3) La fonction valeur w est donnée par

$$w(v) = \frac{\alpha v}{r - \frac{1}{2}} - \frac{c}{r}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2r}}\left(\frac{v}{B_c}\right)^{-\sqrt{2r}}\right)$$

où $v > B_c$.

Ce résultat est déjà connu, le problème d'arrêt optimal (1.5) étant déjà étudié dans [27] pour un mouvement Brownien avec drift. Les paramètres $(m, \sigma, \delta, (\theta - 1)C)$ du modèle de Duffie et Lando correspondent ici à $(0, 1, \alpha, c)$. Contrairement à leur méthode, la méthode que nous proposons permet d'éviter les longs calculs de l'opérateur différentiel ou intégro-différentiel pour les processus à sauts.

1.3.2. Processus mixte diffusion-sauts dont les sauts sont de loi double-exponentielle

Les hypothèses de ce modèle sont essentiellement celles considérées par Kou et Wang [49, 50] et par Chen et Kou [16]. En effet on suppose que X est un processus stochastique à sauts et que les sauts ont une distribution double exponentielle :

$$X_t = mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,\ t \geq 0, \tag{1.12}$$

$(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard, $(N_t,\ t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité constante positive a, $(Y_i,\ i \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant une "distribution double exponentielle", c'est-à-dire de densité

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y>0} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{y<0}$$

avec $p + q = 1$, $p, q \geq 0$, $\eta_1 > 1$ et $\eta_2 > 0$.

On suppose de plus que $(Y_i,\ i \in \mathbb{N})$, $(N_t,\ t \geq 0)$ et $(W_t,\ t \geq 0)$ sont indépendants.

La condition $\eta_1 > 1$ entraîne $\mathbb{E}(e^Y) < \infty$. En effet comme η_1 et η_2 sont positifs, et $p + q = 1$, $f_Y(.)$ est bien une densité : $\int_{-\infty}^{\infty} f_Y(y)dy = 1$. De plus $\mathbb{E}(e^Y) = p\eta_1 \int_0^\infty e^{(1-\eta_1)y} dy + q\eta_2 \int_{-\infty}^0 e^{(1+\eta_2)y} dy$, alors les conditions $1 - \eta_1 < 0$ et $1 + \eta_2 > 0$ entraînent $E(e^Y) < \infty$. Lorsque $\eta_2 > 0$, $\mathbb{E}(e^Y) < \infty$ si et seulement si $\eta_1 > 1$. La condition $\eta_1 > 1$ entraîne $\mathbb{E}_v(V_t) < \infty$ pour tout $t \geq 0$. En effet

$$\mathbb{E}_v(V_t) = ve^{(m+\frac{\sigma^2}{2})t}\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}\right) = ve^{(m+\frac{\sigma^2}{2})t}\sum_{n\geq 0}\mathbb{E}(e^Y)^n \frac{e^{-at}(at)^n}{n!} = ve^{\psi(1)t}$$

où $\psi(1) = m + \frac{\sigma^2}{2} + aE(e^Y - 1)$. L'hypothèse 1.1.2 est ainsi vérifiée.

L'hypothèse 1.2.3 s'écrit $r > m + \frac{\sigma^2}{2} + aE(e^Y - 1)$.

Lemme 1.3.4 *Le processus X introduit dans (1.12) vérifie la relation (1.8), c'est à dire*

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right)=0$$

où $R_n=inf\{t\geq 0: e^{-rt+X_t}\geq n\}$. En conséquent l'hypothèse 1.2.8 est vérifiée.

La démonstration de ce lemme repose sur le corollaire 3.3 de [49] rappelé dans la section 4.2 (voir l'égalité (4.4)).

Preuve

On remarque que $R_n=inf\{t\geq 0:(-r+m)t+\sigma W_t+\sum_{i=1}^{N_t}Y_i\geq ln(n)\}$.
Appliquons la relation (4.4) de la section 4.2 à $r=0$, $\beta=1$, $b=ln(n)$ et $X_t=(-r+m)t+\sigma W_t+\sum_{i=1}^{N_t}Y_i$ (en fait nous remplaçons le drift m par $-r+m$) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right)=&n\left[\frac{(\eta_1-\psi_1)(\psi_0-1)}{(\psi_0-\psi_1)(\eta_1-1)}e^{-ln(n)\psi_1}+\frac{(\psi_0-\eta_1)(\psi_1-1)}{(\psi_0-\psi_1)(\eta_1-1)}e^{-ln(n)\psi_0}\right]\\=&n^{1-\psi_1}\frac{(\eta_1-\psi_1)(\psi_0-1)}{(\psi_0-\psi_1)(\eta_1-1)}+n^{1-\psi_0}\frac{(\psi_0-\eta_1)(\psi_1-1)}{(\psi_0-\psi_1)(\eta_1-1)}\end{aligned}\tag{1.13}$$

où $0<\psi_1<\eta_1<\psi_0<\infty$ sont les solutions positives de l'équation $f(\psi)=0$ avec

$$f(\psi)=(-r+m)\psi+\frac{\sigma^2}{2}\psi^2+a\left[\frac{\eta_1 p}{\eta_1-\psi}+\frac{\eta_2 q}{\eta_2+\psi}-1\right].$$

L'équation $f(\psi)=0$ a quatre solutions, et les deux solutions strictement positives sont plus grandes que 1. En effet,

ψ	$-\infty$		$-\eta_2$	0	1		η_1	∞
$f(\psi)$	∞	$-\infty$	∞	0	$f(1)$	∞	$-\infty$	∞

où $f(1)=(-r+m)+\frac{\sigma^2}{2}+a\left[\frac{\eta_1 p}{\eta_1-1}+\frac{\eta_2 q}{\eta_2+1}-1\right]=-r+m+\frac{\sigma^2}{2}+aE(e^Y-1)<0$ d'après l'hypothèse 1.2.3 réécrite dans ce cas.

Comme $1<\psi_1<\eta_1<\psi_0$, alors en prenant la limite dans (1.13) :

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}1_{R_n<\infty}\right)=0.$$

□

Les hypothèses de la proposition 1.2.13 sont vérifiées et le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme

$$\tau_{b_c}=inf\{t\geq 0:\ V_t\leq b_c\}.$$

Les résultats de [49] permettent d'expliciter pour tout b la forme de la fonction $g(.,b)$ sur $]b,\ \infty[$. On suppose $v>b$.

On remarque que

$$\begin{aligned}\tau_b =& inf\{t \geq 0: \ V_t \leq b\} = inf\left\{t \geq 0: \ \frac{V_t}{v} \leq \frac{b}{v}\right\}\\ =& inf\left\{t \geq 0: \ mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq ln\left(\frac{b}{v}\right)\right\}.\end{aligned}$$

Par hypothèse $v > b$, alors $ln(\frac{b}{v}) < 0$ et on peut appliquer la proposition 4.2.1 de la section 4.2 pour calculer $E_v[e^{-r\tau_b}]$ et $\mathbb{E}_v[e^{-r\tau_b}V_{\tau_b}]$ (nous rappelons que dans notre modèle, nous pouvons enlever l'indicatrice $1_{\tau_b<\infty}$ qui apparaît dans l'énoncé de la proposition 4.2.1 puisque le processus $t \mapsto e^{-rt}V_t$ est presque sûrement nul à l'infini conformément au lemme 1.2.6) :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v[e^{-r\tau_b}] &= \frac{\psi_2(\eta_2+\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2}(\frac{v}{b})^{\psi_3} - \frac{\psi_3(\eta_2+\psi_2)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2}(\frac{v}{b})^{\psi_2},\\ \mathbb{E}_v[e^{-r\tau_b}V_{\tau_b}] &= b\left[\frac{(\eta_2+\psi_3)(\psi_2-1)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)}(\frac{v}{b})^{\psi_3} + \frac{(\eta_2+\psi_2)(1-\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)}(\frac{v}{b})^{\psi_2}\right]\end{aligned}$$

où $-\infty < \psi_3 < -\eta_2 < \psi_2 < 0$ sont les deux racines négatives de l'équation

$$m\psi + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2 + a[\frac{\eta_1 p}{\eta_1-\psi} + \frac{\eta_2 q}{\eta_2+\psi} - 1] = r.$$

Ainsi on a pour la fonction g :

$$g(v,b) = \begin{cases} -\frac{\alpha v}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r} & si \ v \leq b\\ \mathbb{E}_v[e^{-r\tau_b}(-\frac{\alpha V_{\tau_b}}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r})] = A_b(\frac{v}{b})^{\psi_3} + D_b(\frac{v}{b})^{\psi_2} & si \ v > b,\end{cases}$$

$$\text{où} \quad \begin{aligned} A_b &= -\frac{\alpha b}{r-\psi(1)}\frac{(\eta_2+\psi_3)(\psi_2-1)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)} + \frac{c}{r}\frac{\psi_2(\eta_2+\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2} \qquad \text{et}\\ D_b &= -\frac{\alpha b}{r-\psi(1)}\frac{(\eta_2+\psi_2)(1-\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)} - \frac{c}{r}\frac{\psi_3(\eta_2+\psi_2)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2}.\end{aligned}$$

On remarque que la fonction $g(.,b)$ est continue pour toute valeur de $b > 0$.

Vérifions les hypothèses du théorème 1.2.17 :

(1) L'équation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) = -\frac{\alpha}{r-\psi(1)}$, soit $A_b\frac{\psi_3}{b} + D_b\frac{\psi_2}{b} = -\frac{\alpha}{r-\psi(1)}$ a une unique solution. En effet, en remplaçant A_b et D_b par les valeurs calculées, on obtient :

$$-\frac{\alpha\psi_3}{r-\psi(1)}\frac{(\eta_2+\psi_3)(\psi_2-1)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)} + \frac{c}{rb}\frac{\psi_2\psi_3(\eta_2+\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2} - \frac{\alpha\psi_2}{(r-\psi(1))}\frac{(\eta_2+\psi_2)(1-\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)} - \frac{c}{rb}\frac{\psi_2\psi_3(\eta_2+\psi_2)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2} = \frac{-\alpha}{r-\psi(1)}$$

et cette équation a une unique solution $B_c = \frac{c(r-\psi(1))\psi_2\psi_3(\eta_2+1)}{r\alpha\eta_2(1-\psi_2)(1-\psi_3)} \in]0, \frac{c(r-\psi(1))}{r\alpha}[$.

De plus l'inéquation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) \geq -\frac{\alpha}{r-\psi(1)}$ impose sur b la contrainte $b \geq B_c$.

(2) On remarque que la fonction $g(., B_c) \in \mathcal{C}^2(]B_c, \ \infty[)$ et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(v, B_c) =& A_c(\frac{1}{B_c})^{\psi_3}\psi_3(\psi_3-1)v^{\psi_3-2} + D_c(\frac{1}{B_c})^{\psi_2}\psi_2(\psi_2-1)v^{\psi_2-2} \\
\text{où} \qquad A_c =& \frac{c\psi_2(\eta_2+\psi_3)}{r(\psi_2-\psi_3)\eta_2(1-\psi_3)} > 0, \\
D_c =& -\frac{c\psi_3(\eta_2+\psi_2)}{r(\psi_2-\psi_3)\eta_2(1-\psi_2)} > 0.
\end{aligned}$$

Ainsi $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(v, B_c) > 0$ pour $v > B_c$ et $g(., B_c)$ est bien strictement convexe à droite de B_c.

On peut donc appliquer le théorème 1.2.17 et le temps d'arrêt optimal est

$$\tau^*(c) = inf\{t \geq 0 : V_t \leq B_c\}.$$

D'après le lemme 1.2.11, notre problème peut être ramené à un problème d'arrêt optimal pour une option put américaine dont le prix d'exercice est égal à $\frac{c(r-\psi(1))}{r\alpha}$:

$$s(v) = sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\left(\frac{-\alpha V_\tau}{r-\psi(1)}+\frac{c}{r}\right)^+\right] = \frac{\alpha}{r-\psi(1)}sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\left(-V_\tau+\frac{c(r-\psi(1))}{r\alpha}\right)^+\right].$$

Ainsi, on retrouve le résultat du théorème 1 de [50]. Kou et Wang résolvent à l'aide des équations intégro-différentielles un problème d'arrêt optimal pour une option put américaine. Les paramétres $(\lambda^*, r-\frac{\sigma^2}{2}-\lambda^*\xi^*, K, \beta_{3,r}, \beta_{4,r})$ correspondent ici à $(a, m, \frac{c(r-\psi(1))}{r\alpha}, -\psi_2, -\psi_3)$.

Proposition 1.3.5 *Soit X le processus défini dans (1.12). Alors, avec les notations introduites dans la section 1.3.2 :*
1) Le plus petit temps d'arrêt optimal est $\tau^*(c) = inf\{t \geq 0 : \ V_t \leq B_c\}$ où
$B_c = \frac{c(r-\psi(1))\psi_2\psi_3(\eta_2+1)}{r\alpha\eta_2(1-\psi_2)(1-\psi_3)}$.
2) La stratégie maximale est $(\tau^*(c), c)$.
3) Pour $v > B_c$, la fonction valeur w est égale à

$$w(v) = \frac{\alpha v}{r-\psi(1)} - \frac{c}{r} + \frac{c\psi_2(\eta_2+\psi_3)}{r(\psi_2-\psi_3)\eta_2(1-\psi_3)}(\frac{v}{B_c})^{\psi_3} - \frac{c\psi_3(\eta_2+\psi_2)}{r(\psi_2-\psi_3)\eta_2(1-\psi_2)}(\frac{v}{B_c})^{\psi_2}.$$

1.3.3. Processus de Poisson

Soit $X = -N$ où $(N_t, \ t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité constante positive a. Donc $V = ve^{-N}$. Dans ce cas la transformée de Laplace du processus X existe, l'hypothèse 1.1.2 est vérifiée et $\psi(1) = a(e^{-1}-1)$. Nous remarquons qu'ici l'hypothèse 1.2.3 est toujours vérifiée puisque $r > 0 > a(e^{-1} - 1)$. De plus, le processus $t \mapsto Y_t = e^{-rt}\left(\frac{-\alpha v e^{-N_t}}{r-a(e^{-1}-1)} + \frac{c}{r}\right)$ est borné et nous avons directement qu'il est de classe D.

Dans ce cas particulier, comme la composante gaussienne du processus X est nulle, le lemme 1.2.11 ne peut pas être appliqué. Nous rappelons que ce lemme nous permettait de réécrire la fonction s sous une forme particulière ($s(v) = sup_{\tau \geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-rt}f^+(V_t)]$) afin de pouvoir appliquer le théorème 4.1.3 de la section 4.1 et de trouver la forme du plus petit temps d'arrêt optimal. Or, lorsque $X = -N$, le théorème 4.1.3 peut être appliqué directement puisque le processus V est borné et par conséquent le processus $t \mapsto e^{-rt}f(V_t)$ est borné. Le plus petit temps d'arrêt optimal est $\tau^* = inf\{t : f(V_t) = s(V_t)\}$. Dans ce cas particulier où $X = -N$, la fonction s est définie sur $\{v, ve^{-1}, ve^{-2}...\}$, son prolongement continu par interpolation linéaire est convexe, la fin de la proposition 1.2.13 s'applique et la conclusion de la proposition 1.2.13 est valide.

Le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme

$$\tau_{b_c} = inf\{t \geq 0 : \ V_t \leq b_c\} = inf\left\{t \geq 0 : \ N_t \geq ln\left(\frac{v}{b_c}\right)\right\} = \tau^0_{ln\frac{v}{b_c}}$$

et dans ce cas il coïncide avec un instant de saut du processus N.

Soit $(T_i, \ i \in \mathbb{N}^*)$ la suite de variables aléatoires représentant les instants de saut du processus N.

Pour trouver la forme de la fonction $g(.,b)$ on calcule $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\right)$ et $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}V_{\tau_b}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\right) =& \sum_{i\geq 0}\mathbb{E}\left(e^{-rT_i}\mathbf{1}_{\tau^0_{ln\frac{v}{b}}=T_i}\right)\\ =& \mathbf{1}_{ln\frac{v}{b}\leq 0} + \sum_{i\geq 1}\mathbb{E}\left(e^{-rT_i}\right)\mathbf{1}_{i-1<ln\frac{v}{b}\leq i}.\end{aligned}$$

Comme $T_i = S_1 + ... + S_i$ où $(S_j, \ j = 1, ... \ i)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre a, alors $\mathbb{E}\left(e^{-rT_i}\right) = \mathbb{E}\left(e^{-rS_1}\right)^i = \left(\frac{a}{r+a}\right)^i$ et

$$\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\right) = \mathbf{1}_{ln\frac{v}{b}\leq 0} + \sum_{i\geq 1}\left(\frac{a}{r+a}\right)^i\mathbf{1}_{i-1<ln\frac{v}{b}\leq i}.$$

En utilisant le même raisonnement on calcule

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}V_{\tau_b}\right) =& v\sum_{i\geq 0}\mathbb{E}\left(e^{-rT_i-i}\mathbf{1}_{\tau^0_{ln\frac{v}{b}}=T_i}\right)\\ =& v\mathbf{1}_{ln\frac{v}{b}\leq 0} + v\sum_{i\geq 1}\left(\frac{a}{e(r+a)}\right)^i\mathbf{1}_{i-1<ln\frac{v}{b}\leq i}.\end{aligned}$$

La fonction $g(.,b)$ est de la forme :

$$g(v,b) = \begin{cases} -\frac{\alpha v}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r} & si\ v \leq b \\ -\frac{\alpha v}{r-\psi(1)} \frac{a}{e(r+a)} + \frac{c}{r} \frac{a}{r+a} & si\ b < v \leq be \\ -\frac{\alpha v}{r-\psi(1)} \left(\frac{a}{e(r+a)}\right)^2 + \frac{c}{r} \left(\frac{a}{r+a}\right)^2 & si\ be < v \leq be^2 \\ \ldots & \end{cases}$$

Cette fonction est continue convexe pour une seule valeur de b (que l'on note B_c) : $B_c = \frac{ce(r-\psi(1))}{\alpha(er+ea-a)} \in]0, \frac{c(r-\psi(1))}{\alpha r}[$. Ainsi d'après le théorème 1.2.19, le temps d'arrêt optimal est

$$\tau^*(c) = inf\{t \geq 0 :\ V_t \leq B_c\}.$$

Proposition 1.3.6 *Soit $X = -N$ où $(N_t,\ t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité constante positive a. Avec les notations introduites dans la section 1.3.3 :*
1) Le plus petit temps d'arrêt optimal est $\tau^*(c) = inf\{t \geq 0 :\ V_t \leq B_c\}$ où $B_c = \frac{ce(r-\psi(1))}{\alpha(er+ea-a)}$.
2) La stratégie maximale est $(\tau^*(c), c)$.
3) Pour $v > B_c$, la fonction valeur w est égale à

$$w(v) = \sum_{i\geq 1} \left[\frac{\alpha v}{r-\psi(1)} \left(1 - \left(\frac{a}{e(r+a)}\right)^i\right) - \frac{c}{r}\left(1 - \left(\frac{a}{r+a}\right)^i\right)\right] \mathbf{1}_{B_c e^{i-1} < v \leq B_c e^i}.$$

1.4. Processus de Lévy à sauts négatifs. Cas d'un processus à variation non-bornée.

Le cas d'un processus de Lévy à sauts négatifs est plus compliqué et nécessite plus de calculs que les autres exemples. Nous présentons ici l'exemple d'un processus de Lévy à sauts négatifs avec une composante gaussienne non-nulle.

1.4.1. Notations, hypothèses et outils

Dans la suite nous considérons X un processus de Lévy à sauts négatifs. Nous excluons le cas où X est un subordinateur négatif (d'après [4] page 71, un subordinateur est un processus de Lévy positif croissant). D'après [4] chapitre 7, pages 187-189 la transformée de Laplace d'un tel processus existe et est de la forme :

$$\mathbb{E}(e^{\lambda X_t}) = e^{t\psi(\lambda)} \quad \text{où} \quad \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \psi(\lambda) = -\Psi(-i\lambda) = \mu\lambda + \frac{\sigma^2}{2}\lambda^2 + \int_{-\infty}^{0} (e^{\lambda x} - 1 - \lambda x \mathbf{1}_{x>-1})\Pi(dx).$$

La fonction $\psi : [0,\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ est strictement convexe et $lim_{\lambda\rightarrow\infty}\psi(\lambda) = \infty$. Soit $\Phi(0)$ la plus grande solution de l'équation $\psi(\lambda) = 0$. Nous remarquons que 0 est toujours solution de $\psi(\lambda) = 0$. Si $\Phi(0) > 0$, alors comme ψ est strictement convexe, 0 et $\Phi(0)$ sont les seules solutions de $\psi(\lambda) = 0$. Dans tous les cas $\psi : [\Phi(0), \infty[\to \mathbb{R}_+$ est continue, croissante d'inverse $\Phi : [0, \infty[\to [\Phi(0), \infty[$: $\psi \circ \Phi(\lambda) = \lambda$ $(\lambda > 0)$. L'hypothèse 1.2.3, c'est à dire $r > \psi(1)$, est équivalente à $\Phi(r) > 1$.

Le lemme suivant servira plus tard, pour montrer que le seuil optimal appartient au "bon" intervalle.

Lemme 1.4.1 *Pour tout $r \geq 0$ tel que $r > \psi(1)$ on a $\frac{\Phi(r)-1}{\Phi(r)} \leq \frac{r-\psi(1)}{r}$.*

Preuve
Remarquons que si $\psi(1) \leq 0$, donc si $\Phi(0) \geq 1$, l'inégalité est vérifiée : $\frac{\Phi(r)-1}{\Phi(r)} \leq 1 \leq \frac{r-\psi(1)}{r}$. Supposons maintenant que $\psi(1) > 0$, donc $\Phi(0) < 1 < \Phi(r)$. La fonction ψ est convexe, donc d'après le lemme des trois cordes :

$$\frac{\psi(1) - \psi(\Phi(0))}{1 - \Phi(0)} \leq \frac{\psi(\Phi(r)) - \psi(1)}{\Phi(r) - 1}, \text{ soit } \frac{\psi(1)}{1 - \Phi(0)} \leq \frac{r - \psi(1)}{\Phi(r) - 1}, \text{ d'où } \frac{\psi(1)}{r - \psi(1)} \leq \frac{1 - \Phi(0)}{\Phi(r) - 1}.$$

On rajoute 1 de chaque côté et on obtient :

$$\frac{r}{r - \psi(1)} \leq \frac{\Phi(r) - \Phi(0)}{\Phi(r) - 1} \leq \frac{\Phi(r)}{\Phi(r) - 1}.$$

Il suffit d'inverser et $\frac{\Phi(r)-1}{\Phi(r)} \leq \frac{r-\psi(1)}{r}$. □

Dans toute la suite nous supposons que $r > \psi(1)$ (hypothèse 1.2.3).

Le processus $t \mapsto e^{cX_t - \psi(c)t}$ est une martingale : pour tout $s \leq t$

$$\mathbb{E}(e^{cX_t - \psi(c)t} | \mathcal{F}_s^X) = e^{cX_s - \psi(c)t} \mathbb{E}(e^{c(X_t - X_s)} | \mathcal{F}_s^X) = e^{cX_s - \psi(c)s}.$$

Pour tout $c \geq 0$, nous définissons une nouvelle probabilité $\mathbb{P}^c$: $\frac{d\mathbb{P}^c}{d\mathbb{P}} |_{\mathcal{F}_t} = e^{cX_t - \psi(c)t}$. En suivant [52], nous introduisons la fonction suivante :

Définition 1.4.2 *Pour tout $q \geq 0$ soit $W^{(q)} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par*

$$W^{(q)}(x) = e^{\Phi(q)x} \mathbb{P}_x^{\Phi(q)}(inf_{t \geq 0} X_t \geq 0)$$

où $\mathbb{P}_x(.) = \mathbb{P}(.|X_0 = x)$.

La proposition suivante présente quelques propriétés de la fonction $W^{(q)}$ démontrées dans [52] et [15] :

Proposition 1.4.3 *Pour tout $q \geq 0$, la fonction $W^{(q)}$ a les propriétés suivantes :*

(1) $W^{(q)}(x) = 0$ *pour tout* $x < 0$ *et* $W^{(q)}$ *est une fonction continue croissante sur* $[0, \infty[$ *dont la transformée de Laplace vérifie la relation*

$$\int_0^\infty e^{-\beta x} W^{(q)}(x) dx = \frac{1}{\psi(\beta) - q}$$

pour $\beta > \Phi(q)$ *(théorème 8.1 page 214 de [52]).*

(2) $W^{(q)}(0) = 0$ *si et seulement si* X *est à variation non-bornée (lemme 8.6 page 223 de [52]).*

(3) $W^{(q)\prime}(0) = \frac{2}{\sigma^2}$ *si* X *est à variation non-bornée (exercice 8.5 page 234 de [52]).*

(4) *Si le processus* X *présente une composante gaussienne, alors la fonction* $W^{(q)}$ *est* $\mathcal{C}^2(]0, \infty[)$ *(théorème 2 de [15]).*

Nous introduisons les fonctions suivantes :

Définition 1.4.4 *Pour* $q \geq 0$ *soit* $Z^{(q)} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ *la fonction définie par*

$$Z^{(q)}(x) = 1 + q \int_0^x W^{(q)}(y) dy.$$

Définition 1.4.5 *Pour tout* $q \in \mathbb{C}$ *et* $c \in \mathbb{R}$ *tel que* $\psi(c) \leq q$, *on pose*

$$W_c^{(q-\psi(c))}(x) = e^{-cx} W^{(q)}(x) \quad \text{et} \quad Z_c^{(q-\psi(c))}(x) = 1 + (q - \psi(c)) \int_0^x W_c^{(q-\psi(c))}(y) dy$$

pour tout $x \geq 0$.

Remarque 1.4.6 *i) En utilisant la proposition 1.4.3 (2) et la définition 1.4.5, si* X *est à variation non-bornée, alors*

$$W_c^{(q-\psi(c))}(0) = 0.$$

ii) De plus, les définitions 1.4.4 et 1.4.5 prises en $x = 0$ *donnent*

$$Z^{(q)}(0) = 1, \; Z_c^{(q-\psi(c))}(0) = 1.$$

1.4.2. Le temps d'arrêt optimal

Nous supposons $\sigma > 0$; ainsi le processus de Lévy pourrait être vu comme la somme d'un mouvement brownien avec drift et un processus à sauts négatifs. Dans la suite nous nous restreignons aux processus de Lévy à sauts négatifs avec une composante gaussienne non-nulle ; ce sont donc des processus à variation non-bornée.

Lemme 1.4.7 *Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs avec une composante gaussienne non-nulle, vérifiant l'hypothèse 1.2.3. Ce processus vérifie la relation (1.8), c'est à dire*

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right)=0$$

où $R_n = inf\{t \geq 0 : e^{-rt+X_t} \geq n\}$. L'hypothèse 1.2.8 est donc vérifiée.

La démonstration de ce lemme repose sur le résultat suivant de [52] :

Lemme 1.4.8 *(corollaire 3.13 page 82 de [52])*
Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs et pour tout $x > 0$ soit τ^x le temps d'arrêt défini par $\tau^x = inf\{t > 0 : X_t > x\}$. Alors

$$\mathbb{P}_0\left(\tau^x<\infty\right)=e^{-\Phi(0)x}$$

avec $\Phi(0)$ introduit dans la sous-section 1.4.1. De plus, comme le processus X n'a pas de sauts positifs, alors $\mathbb{P}_0(X_{\tau^x} = x|\tau^x < \infty) = 1$ (page 212 de [52]).

Preuve du lemme 1.4.7
On remarque d'abord que pour tout $x > 0$, $inf\{t > 0 : X_t > x\} = inf\{t \geq 0 : X_t \geq x\}$. En effet comme $x > 0$, alors $\mathbb{P}_0(\tau^x = 0) = 0$ et $inf\{t > 0 : X_t > x\} = inf\{t \geq 0 : X_t > x\}$. Comme X est un processus sans sauts positifs, $\mathbb{P}_0(X_{\tau^x} = x|\tau^x < \infty) = 1$ et

$$inf\{t>0:X_t>x\}=inf\{t\geq 0:X_t\geq x\} \text{ sur } \{\tau^x<\infty\}.$$

Le temps d'arrêt R_n s'écrit sous la forme $R_n = inf\{t \geq 0 : -rt + X_t \geq ln(n)\}$. En appliquant le lemme 1.4.8 au processus $t \mapsto -rt + X_t$ et $x = ln(n)$, on a

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right)=ne^{-\bar{\Phi}(0)ln(n)}=n^{1-\bar{\Phi}(0)}, \tag{1.14}$$

avec $\bar{\Phi}(0)$ la plus grande solution de l'équation $\bar{\psi}(\lambda) = 0$ où

$$\bar{\psi}(\lambda)=(\mu-r)\lambda+\frac{\sigma^2}{2}\lambda^2+\int_{-\infty}^0(e^{\lambda x}-1-\lambda x\mathbf{1}_{x>-1})\Pi(dx).$$

La plus grande solution de l'équation $\bar{\psi}(\lambda) = 0$ vérifie $\bar{\Phi}(0) > 1$. En effet, $\bar{\psi}$ est une fonction continue, $\bar{\psi}(1) = \mu - r + \frac{\sigma^2}{2} + \int_{-\infty}^0 (e^x - 1 - x\mathbf{1}_{x>-1})\Pi(dx) < 0$ d'après l'hypothèse 1.2.3 et cette fonction tend vers l'infini quand λ tend vers l'infini.

En faisant tendre n vers l'infini dans la relation (1.14),

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n+X_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right)=0.$$

□

Les hypothèses de la proposition 1.2.13 sont vérifiées et le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme

$$\tau_{b_c} = inf\{t \geq 0 : \; V_t \leq b_c\} = inf\left\{t \geq 0 : \; X_t \leq ln\left(\frac{b_c}{v}\right)\right\}.$$

Dans [52], l'auteur calcule la transformée de Laplace d'un temps d'arrêt de la forme $\tau_x^- = inf\{t > 0 : \; X_t < x\}$ ainsi que la transformée de Laplace du couple $(\tau_x^-, \; X_{\tau_x^-})$. Afin de pouvoir appliquer ses résultats, nous montrons que s'il existe une composante gaussienne non-nulle, alors le temps d'atteinte τ_x^- est égal à $inf\{t \geq 0 : \; X_t \leq x\}$.

Proposition 1.4.9 *Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs avec une composante gaussienne non-nulle. Alors, $\mathbb{P}_0$-presque sûrement*

$$inf\{t \geq 0 : \; X_t \leq x\} = inf\{t \geq 0 : \; X_t < x\} = inf\{t > 0 : \; X_t < x\}$$

pour tout $x \leq 0$.

La preuve de cette proposition repose sur le résultat suivant de [52] :

Proposition 1.4.10 *(théorème 8.1 (ii) page 214 de [52])*
Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs et $\tau_0^- = inf\{t > 0 : X_t < 0\}$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $r \geq 0$,

$$\mathbb{E}_x\left(e^{-r\tau_0^-}\mathbf{1}_{\tau_0^- < \infty}\right) = Z^{(r)}(x) - \frac{r}{\Phi(r)}W^{(r)}(x)$$

où $\mathbb{E}_x(.) = \mathbb{E}(.|X_0 = x)$.

Preuve de la proposition 1.4.9
On démontre d'abord la première égalité et on note $\tau_x' = inf\{t \geq 0 : \; X_t < x\}$. On se propose de montrer que $\tau_x = \tau_x'$ $\mathbb{P}_0$-presque sûrement. Comme $\tau_x \leq \tau_x'$, alors
$\tau_x' = \tau_x + \tau_x' \circ \theta_{\tau_x}$ où θ est l'opérateur de translation. On applique la propriété de Markov forte en τ_x :

$$\mathbb{P}_0(\tau_x = \tau_x') = \mathbb{E}_0\left(\mathbb{P}_{X_{\tau_x}}(\tau_x' = 0)\right) = \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{X_{\tau_x} < x}) + \mathbb{E}_0\left(\mathbf{1}_{X_{\tau_x} = x}\mathbb{P}_x(\tau_x' = 0)\right).$$

Le processus X est plus petit qu'un mouvement brownien avec drift , $X_t \leq \mu t + \sigma W_t$ pour tout $t \geq 0$, et

$$\mathbb{P}_x(\tau_x' = 0) \geq \mathbb{P}_x(\tau_x'^{\mu,W} = 0)$$

où on a noté $\tau_x'^{\mu,W} = inf\{t \geq 0 : \; \mu t + \sigma W_t < x\}$. Or $\mathbb{P}_x$-presque sûrement on a

$$inf\{t \geq 0 : \mu t + \sigma W_t < x\} = inf\{t \geq 0 : \mu t + \sigma W_t = x\},$$

donc $\mathbb{P}_x(\tau_x'^{\mu,W} = 0) = 1$, d'où $\mathbb{P}_x(\tau_x' = 0) = 1$ et

$$\mathbb{P}_0(\tau_x = \tau'_x) = \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{X_{\tau_x}<x}) + \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{X_{\tau_x}=x}) = 1.$$

On démontre maintenant la deuxième égalité, soit

$$inf\{t \geq 0 : \ X_t < x\} = inf\{t > 0 : \ X_t < x\}.$$

Pour $x < 0$, l'égalité est vérifiée. Le problème se pose en $x = 0$. On se propose donc de montrer l'égalité $inf\{t \geq 0 : \ X_t < 0\} = inf\{t > 0 : \ X_t < 0\}$. En utilisant la première égalité de l'énoncé de la proposition, $\mathbb{P}_0$-presque sûrement on a $\tau'_0 = 0$.
On note $\tau_0^- = inf\{t > 0 : \ X_t < 0\}$ et on veut montrer que $\mathbb{P}_0(\tau_0^- = 0) = 1$.

Dans la proposition 1.4.10 on prend $x = 0$ et pour tout $r \geq 0$ on a

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-r\tau_0^-}\mathbf{1}_{\tau_0^-<\infty}\right) = Z^{(r)}(0) - \frac{r}{\Phi(r)}W^{(r)}(0).$$

Comme X est un processus à variation non-bornée, d'après la proposition 1.4.3 (2), $W^{(r)}(0) = 0$ et d'après la remarque 1.4.6 *ii*), $Z^{(r)}(0) = 1$, d'où

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-r\tau_0^-}\mathbf{1}_{\tau_0^-<\infty}\right) = 1.$$

Or $0 \leq e^{-r\tau_0^-}\mathbf{1}_{\tau_0^-<\infty} \leq 1$ ce qui implique $e^{-r\tau_0^-}\mathbf{1}_{\tau_0^-<\infty} = 1$ $\mathbb{P}_0$-presque sûrement d'où la conclusion. $\square$

Pour trouver la forme de la fonction g nous utilisons les deux résultats suivants :

Corollaire 1.4.11 *Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs, $x \leq 0$ et $\tau_x^- = inf\{t > 0 : X_t < x\}$. Pour tout $r \geq 0$, la transformée de Laplace de τ_x^- est égale à*

$$\mathbb{E}_0\left[e^{-r\tau_x^-}\mathbf{1}_{\tau_x^-<\infty}\right] = Z^{(r)}(-x) - \frac{r}{\Phi(r)}W^{(r)}(-x).$$

Preuve
Il suffit de remarquer que $\tau_x^- = inf\{t > 0 : X_t < x\} = inf\{t > 0 : X_t - x < 0\}$ et $\mathbb{E}_0\left[e^{-r\tau_x^-}\mathbf{1}_{\tau_x^-<\infty}\right] = \mathbb{E}_{-x}\left[e^{-r\tau_0^-}\mathbf{1}_{\tau_0^-<\infty}\right]$. Ensuite on applique la proposition 1.4.10. $\square$

Proposition 1.4.12 *(exercice 8.7 de [52])*

Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs et $\tau_x^- = inf\{t > 0 : X_t < x\}$. Pour tout $x < 0$, $c \geq 0$ et $r \geq \psi(c) \vee 0$, on a :

$$\mathbb{E}_0\left[e^{-r\tau_x^- + c(X_{\tau_x^-}-x)}\mathbf{1}_{\tau_x^-<\infty}\right] = e^{-cx}\left(Z_c^{(r-\psi(c))}(-x) - \frac{r-\psi(c)}{\Phi(r)-c}W_c^{(r-\psi(c))}(-x)\right).$$

D'après la proposition 1.4.9, le temps d'arrêt optimal est de la forme $\tau^-_{ln\frac{bc}{v}}$ $\mathbb{P}_0$-presque sûrement et on peut utiliser la proposition 1.4.12 et le corollaire 1.4.11 pour résoudre notre problème de temps d'arrêt optimal (on prend $x = ln\frac{bc}{v}$). Ensuite d'après le lemme 1.2.6, dans notre cas on peut enlever l'indicatrice $\mathbf{1}_{\tau_x^- < \infty}$ et la fonction $g(.,b)$ est de la forme $-\frac{\alpha v}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r}$ si $v \leq b$; sinon

$$\frac{-\alpha v}{r-\psi(1)} \left[Z_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{b}\right) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1} W_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{b}\right)\right] + \frac{c}{r}\left[Z^{(r)}\left(ln\frac{v}{b}\right) - \frac{r}{\Phi(r)} W^{(r)}\left(ln\frac{v}{b}\right)\right].$$

On remarque que pour toute valeur de b la fonction $g(.,b)$ est continue. En effet, en utilisant la proposition 1.4.3, $lim_{v\downarrow b} g(v,b)$ est égale à :

$$\begin{aligned}
&lim_{v\downarrow b}\frac{-\alpha v}{r-\psi(1)} \left[Z_1^{(r-\psi(1))}(ln\frac{v}{b}) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1} W_1^{(r-\psi(1))}(ln\frac{v}{b})\right] + \frac{c}{r}\left[Z^{(r)}(ln\frac{v}{b}) - \frac{r}{\Phi(r)} W^{(r)}(ln\frac{v}{b})\right]\\
&=\frac{-\alpha b}{r-\psi(1)} \left[Z_1^{(r-\psi(1))}(0) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1} W_1^{(r-\psi(1))}(0)\right] + \frac{c}{r}\left[Z^{(r)}(0) - \frac{r}{\Phi(r)} W^{(r)}(0)\right]\\
&= -\frac{\alpha b}{r-\psi(1)} + \frac{c}{r} = g(b,b)
\end{aligned}$$

Afin de pouvoir vérifier les hypothèses du théorème 1.2.17, nous démontrons les résultats suivants :

Proposition 1.4.13 *Pour tout $x \geq 0$, $r \geq \psi(c) \vee 0$ et $c \in \mathbb{R}$, les égalités suivantes sont vraies :*
1) $Z'^{(r)}(x) = rW^{(r)}(x)$,
2) $W_c'^{(r-\psi(c))}(x) = -ce^{-cx}W^{(r)}(x) + e^{-cx}W'^{(r)}(x)$,
3) $Z_c'^{(r-\psi(c))}(x) = (r-\psi(c))W_c^{(r-\psi(c))}(x) = (r-\psi(c))e^{-cx}W^{(r)}(x)$.

Preuve
Par définition $Z^{(r)}(x) = 1 + r\int_0^x W^{(r)}(y)dy$, d'où $Z'^{(r)}(x) = rW^{(r)}(x)$.
Pour la deuxième égalité on dérive en x la relation $W_c^{(r-\psi(c))}(x) = e^{-cx}W^{(r)}(x)$ et on obtient

$$W_c'^{(r-\psi(c))}(x) = -ce^{-cx}W^{(r)}(x) + e^{-cx}W'^{(r)}(x).$$

Pour la dernière relation il suffit de dériver l'expression

$$Z_c^{(r-\psi(c))}(x) = 1 + (r-\psi(c))\int_0^x W_c^{(r-\psi(c))}(y)dy$$

et $Z_c'^{(r-\psi(c))}(x) = (r-\psi(c))W_c^{(r-\psi(c))}(x) = (r-\psi(c))e^{-cx}W^{(r)}(x)$. □

Le résultat suivant est obtenu en utilisant les propositions 1.4.3 ((2) et (3)) et 1.4.13.

Corollaire 1.4.14 *Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs. On suppose de plus que X est à variation non-bornée. Alors pour tout $r \geq \psi(c) \vee 0$ et $c \in \mathbb{R}$, on a :*
1) $Z'^{(r)}(0) = 0$ et $Z_c'^{(r-\psi(c))}(0) = 0$,
2) $W_c'^{(r-\psi(c))}(0) = \frac{2}{\sigma^2}$.

Proposition 1.4.15 *(preuve théorème 9.11 page 258 de [52]) Pour tout $r \geq 0$ et $x \geq 0$:*

$$W'^{(r)}(x) - \Phi(r)W^{(r)}(x) > 0.$$

Maintenant nous avons tous les outils nécessaires pour vérifier les hypothèses du théorème 1.2.17 :

(1) La dérivée à droite de la fonction $g(.,b)$ est égale à :

$$\begin{aligned}\frac{\partial_d g}{\partial v}(v,b) =& \frac{-\alpha}{r-\psi(1)}\left[Z_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{b}\right) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1}W_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{b}\right)\right] \\ &- \frac{\alpha v}{r-\psi(1)}\left[Z_1'^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{b}\right)\frac{1}{v} - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1}W_1'^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{b}\right)\frac{1}{v}\right] \\ &+ \frac{c}{r}\left[Z'^{(r)}\left(ln\frac{v}{b}\right)\frac{1}{v} - \frac{r}{\Phi(r)}W'^{(r)}\left(ln\frac{v}{b}\right)\frac{1}{v}\right].\end{aligned} \tag{1.15}$$

Donc la dérivée $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b)$ est égale à

$$\frac{-\alpha}{r-\psi(1)}\left[Z_1^{(r-\psi(1))}(0) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1}W_1^{(r-\psi(1))}(0) + Z_1'^{(r-\psi(1))}(0) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1}W_1'^{(r-\psi(1))}(0)\right]$$
$$+\frac{c}{rb}\left[Z'^{(r)}(0) - \frac{r}{\Phi(r)}W'^{(r)}(0)\right].$$

On utilise la remarque 1.4.6 et le corollaire 1.4.14 :

$$\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) = \frac{-\alpha}{r-\psi(1)}\left[1 - \frac{2(r-\psi(1))}{\sigma^2(\Phi(r)-1)}\right] - \frac{2c}{b\Phi(r)\sigma^2}.$$

L'équation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) = -\frac{\alpha}{r-\psi(1)}$ a une unique solution $B_c = \frac{c(\Phi(r)-1)}{\alpha\Phi(r)} \in]0, \frac{c(r-\psi(1))}{\alpha r}[$ (d'après le lemme 1.4.1) et l'inéquation $\frac{\partial_d g}{\partial v}(b,b) \geq -\frac{\alpha}{r-\psi(1)}$ implique $b \geq B_c$.

(2) Pour simplifier la relation (1.15) on utilise la définition 1.4.5 et la proposition 1.4.13. De plus ici on prend $b = B_c$. Ainsi $\frac{\partial_d g}{\partial v}(v, B_c)$ est égale à

$$\frac{-\alpha}{r-\psi(1)}\left(Z_1^{(r-\psi(1))}(ln\frac{v}{B_c}) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1}e^{-ln\frac{v}{B_c}}W^{(r)}(ln\frac{v}{B_c})\right)$$
$$-\frac{\alpha}{r-\psi(1)}\left((r-\psi(1))e^{-ln\frac{v}{B_c}}W^{(r)}(ln\frac{v}{B_c}) - \frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1}(-e^{-ln\frac{v}{B_c}}W^{(r)}(ln\frac{v}{B_c}) + e^{-ln\frac{v}{B_c}}W'^{(r)}(ln\frac{v}{B_c}))\right)$$
$$+\frac{c}{rv}\left(rW^{(r)}(ln\frac{v}{B_c}) - \frac{r}{\Phi(r)}W'^{(r)}(ln\frac{v}{B_c})\frac{1}{v}\right).$$

Donc

$\frac{\partial_d g}{\partial v}(v,B_c)=\frac{-\alpha}{r-\psi(1)}Z_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)+W'^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\left(\frac{\alpha B_c}{v(\Phi(r)-1)}-\frac{c}{v\Phi(r)}\right)+W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\left(\frac{-\alpha B_c}{v}+\frac{c}{v}\right).$

Or $B_c=\frac{c(\Phi(r)-1)}{\alpha\Phi(r)}$, donc $\frac{\alpha B_c}{v(\Phi(r)-1)}-\frac{c}{v\Phi(r)}=0$ et $\frac{-\alpha B_c}{v}+\frac{c}{v}=\frac{c}{v\Phi(r)}$.

$$\frac{\partial_d g}{\partial v}(v,B_c)=-\frac{\alpha}{r-\psi(1)}Z_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)+\frac{c}{v\Phi(r)}W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right).$$

En dérivant cette relation on obtient la seconde dérivée de $g(.,B_c)$:
$\frac{\partial_d g^2}{\partial v^2}(v,B_c)=-\frac{\alpha}{v(r-\psi(1))}Z_1'^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)-\frac{c}{v^2\Phi(r)}W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)+\frac{c}{v^2\Phi(r)}W'^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right).$

On utilise la proposition 1.4.13 et $\frac{\partial_d g^2}{\partial v^2}(v,B_c)$ est égale à

$$\begin{aligned}&-\frac{\alpha}{v(r-\psi(1))}(r-\psi(1))e^{-ln\frac{v}{B_c}}W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)-\frac{c}{v^2\Phi(r)}W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)+\frac{c}{v^2\Phi(r)}W'^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\\&=\frac{1}{v^2}W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\left(-\alpha B_c-\frac{c}{\Phi(r)}\right)+\frac{c}{v^2\Phi(r)}W'^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right).\end{aligned}$$

On remplace B_c par sa valeur et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\partial_d g^2}{\partial v^2}(v,B_c)=&\frac{c}{v^2\Phi(r)}W'^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)-\frac{c}{v^2}W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\\=&\frac{c}{v^2\Phi(r)}\left[W'^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)-\Phi(r)W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\right]>0\end{aligned}$$

d'après la proposition 1.4.15. La fonction $g(.,B_c)$ est bien strictement convexe à droite de B_c.

Ainsi d'après le théorème 1.2.17, le plus petit temps d'arrêt optimal est

$$\tau^*(c)=inf\{t\geq 0:\ V_t\leq B_c\}.$$

Proposition 1.4.16 *Soit X un processus de Lévy à sauts négatifs avec une composante gaussienne non-nulle. Alors, avec les notations introduites dans la section 1.4,*
1) Le plus petit temps d'arrêt optimal est $\tau^*(c)=inf\{t\geq 0:\ V_t\leq B_c\}$ où $B_c=\frac{c(\Phi(r)-1)}{\alpha\Phi(r)}$.
2) La stratégie maximale est $(\tau^*(c),c)$.
3) Pour $v>\ B_c$, la fonction valeur $w(v)$ est égale à
$\frac{\alpha v}{r-\psi(1)}-\frac{c}{r}+\frac{-\alpha v}{r-\psi(1)}\left[Z_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)-\frac{r-\psi(1)}{\Phi(r)-1}W_1^{(r-\psi(1))}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\right]+\frac{c}{r}\left[Z^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)-\frac{r}{\Phi(r)}W^{(r)}\left(ln\frac{v}{B_c}\right)\right].$

Remarque 1.4.17 *Dans tous les cas particuliers que nous avons étudiés, $\tau^*(c)$ tend vers l'infini quand c tend vers 0. Dans ce cas la stratégie maximale est $(\infty,0)$ et $w(v)=\frac{\alpha v}{r-\psi(1)}$.*

2. Processus de Feller et fonctions non nécessairement affines

Après nous être intéressés aux problèmes d'arrêt optimal pour les processus de Lévy, nous nous plaçons dans ce chapitre dans le cadre plus général de processus de Feller avec des fonctions de coût plus générales que les fonctions affines vues dans le chapitre 1. Nous introduisons les définitions et les notations utilisées au long de ce chapitre (section 2.1), ensuite nous étudions des problèmes d'arrêt optimal pour des processus de Feller (non nécessairement de Lévy) et des fonctions quelconques (section 2.2). Nous nous intéressons au cas où les plus petits temps d'arrêt optimaux des problèmes considérés sont infinis (section 2.3). Contrairement au premier chapitre, ici le problème est plus compliqué et le plus petit temps d'arrêt optimal n'est pas forcément un temps d'atteinte. Nous nous intéressons à quelques exemples de processus de Feller et de fonctions pour lesquels le plus petit temps d'arrêt optimal du problème considéré est un temps d'atteinte (section 2.4).

2.1. Définitions et notations

Soit $\mathcal{C}_0$ l'ensemble des applications continues qui s'annulent à l'infini. Nous rappelons la définition d'un processus de Feller.

Définition 2.1.1 *Un processus de Feller est un processus de Markov dont la fonction de transition vérifie les hypothèses suivantes :*
(1) $P_t : \mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}_0$ *pour tout* $t \geq 0$,
(2) $P_0 = id$,
(3) $\forall f \in \mathcal{C}_0,\ \forall x \in \mathbb{R},\ lim_{t\to 0}(P_t f)(x) = f(x)$.

Par exemple, les processus de Lévy ayant une densité sont des processus de Feller (d'après l'exercice 4 page 39 de [4]). Pour plus de détails sur les processus de Feller voir [4], [76] ou [86].

Dans la suite nous nous plaçons sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel nous considérons V un processus stochastique s'écrivant sous la forme

$$V = ve^X$$

où v est une constante strictement positive réelle et X est un processus de Feller quelconque. Nous utiliserons parfois la notation $V^v = ve^X$, pour tout $v > 0$. Dans la suite $\mathbb{E}(.|V_0 = v)$ et $\mathbb{P}(.|V_0 = v)$ sont notés $\mathbb{E}_v(.)$ et $\mathbb{P}_v(.)$.

La filtration complétée càd engendrée par le processus V est notée $\mathcal{F}^V$ ($\mathcal{F}_t^V = \sigma(V_s,\ s \leq t)$) et Δ est l'ensemble des $\mathcal{F}_.^V$-temps d'arrêt.

Nous introduisons les ensembles suivants :

Définition 2.1.2 *Soit $\mathcal{A}^{\mathcal{C}}$ l'ensemble des fonctions $g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continues, vérifiant les conditions suivantes : $\mathbb{E}_v\left[esssup_{t\geq 0} max(g(V_t), 0)\right] < \infty$ et $g(v) \geq C > -\infty$ pour tout $v > 0$.*

Soit $C \in \mathbb{R}_+$. Toutes les fonctions continues bornées par C (c'est à dire $|g(v)| \leq C$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+^*$) appartiennent à $\mathcal{A}^{-\mathcal{C}}$.

Définition 2.1.3 *Soit $\mathcal{D}^r$ l'ensemble des fonctions $\bar{g} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ continues, vérifiant la condition suivante : pour $r > 0$ fixé, le processus $t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est de classe D (c'est à dire que l'ensemble des variables aléatoires $e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau)$, $\tau \in \Delta$ est uniformément intégrable).*

Dans la proposition 2.4.5 est décrit l'exemple d'un couple (processus, fonction) dont la fonction appartient à l'ensemble $\mathcal{D}^r$.

2.2. Le problème d'arrêt optimal, ses outils

Soient g et $\bar{g}$ deux fonctions boréliennes vérifiant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 2.2.1 *$\bar{g} \in \mathcal{D}^r$ pour $r > 0$ fixé. Il existe $C \in \mathbb{R}$, $C > -\infty$ tel que $g \in \mathcal{A}^{\mathcal{C}}$.*

Nous considérons les deux problèmes d'arrêt optimal suivants :

$$s(v) = sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left(g(V_\tau)\right), \tag{2.1}$$

$$\bar{s}(v) = sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau)\right) \tag{2.2}$$

où $v > 0$, $r > 0$ et Δ est l'ensemble des $\mathcal{F}_.^V$-temps d'arrêt.

En suivant [81], nous faisons la convention suivante : $g(V_\tau) = limsup_{t\to\infty} g(V_t(\omega))$ et $e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau) = limsup_{t\to\infty} e^{-rt}\bar{g}(V_t(\omega))$ sur l'ensemble $\{\omega : \tau(\omega) = \infty\}$.

Le but de ce paragraphe est de caractériser le plus petit temps d'arrêt optimal des problèmes (2.1) et (2.2). Dans la suite nous rappelons quelques définitions et résultats contenus dans [46], [47] et [81].

Définition 2.2.2 *Le temps d'arrêt τ^* est optimal pour le problème (2.1) si*

$$\mathbb{E}\left(g(V_{\tau^*})\right) = sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}\left(g(V_\tau)\right).$$

Le temps d'arrêt $\bar{\tau}^*$ est optimal pour le problème (2.2) si

$$\mathbb{E}\left(e^{-r\bar{\tau}_t^*}\bar{g}(V_{\bar{\tau}_t^*})\right) = sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}\left(e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau)\right).$$

Remarque 2.2.3 *En prenant $\tau = 0 \in \Delta$ dans les relations (2.1) et (2.2), on obtient $s(v) \geq g(v)$ et $\bar{s}(v) \geq \bar{g}(v)$.*

De nombreux résultats sur le temps d'arrêt optimal existent dans la littérature spécialisée. Par souci de complétude nous rappelons ici deux résultats de [81] et [47] caractérisant les plus petits temps d'arrêt optimaux des problèmes étudiés ici.

Remarque 2.2.4 *(1) D'après le théorème 4.1.3 de la section 4.1, sous l'hypothèse 2.2.1, si $\mathbb{P}_v\left(lim_{t\downarrow 0}g(V_t) = g(v)\right) = 1$, alors le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (2.1) est de la forme*

$$\tau^* = inf\{t \geq 0 : s(V_t) = g(V_t)\}.$$

(2) Le cas du problème (2.2) est un peu plus compliqué. D'après le théorème 4.1.6 de la section 4.1, sous l'hypothèse 2.2.1, si le processus $t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est semi-continu supérieurement sur les trajectoires, alors le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (2.2) est de la forme

$$\bar{\tau}^* = inf\{t \geq 0 : \bar{s}(V_t) = \bar{g}(V_t)\}.$$

Si la fonction $\bar{g}$ est bornée, alors il existe $C \in \mathbb{R}_+$ tel que $\bar{g} \in \mathcal{A}^{-C}$ et grâce au théorème 4.1.3 de la section 4.1, $\bar{\tau}^*$ est le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (2.2).

Ceci nous conduit à introduire les ensembles suivants :

Définition 2.2.5 *On définit les ensembles E et $\bar{E}$ par*

$$E = \{v > 0 : s(v) = g(v)\}, \quad \bar{E} = \{v > 0 : \bar{s}(v) = \bar{g}(v)\}.$$

Avec ces nouvelles notations, le temps d'arrêt τ^* (respectivement $\bar{\tau}^*$) sera le premier temps d'entrée dans E (respectivement dans $\bar{E}$).

Remarque 2.2.6 *Les plus petits temps d'arrêt optimaux des problèmes (2.1) et (2.2) sont $\tau^* = \tau_E$ et $\bar{\tau}^* = \tau_{\bar{E}}$. Ainsi, si les ensembles E et $\bar{E}$ sont vides, alors les temps d'arrêt τ^* et $\bar{\tau}^*$ sont presque sûrement infinis.*

En suivant [81], nous introduisons les fonctions intermédiaires suivantes :

$$\begin{aligned} G^0(v) =& g(v), \\ G^n(v) =& sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v[G^{n-1}(V_t)] \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

De manière analogue nous définissons les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} \bar{G}^0(v) =& \bar{g}(v), \\ \bar{G}^n(v) =& sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-rt}\bar{G}^{n-1}(V_t)] \quad \text{pour tout} \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Les suites $\{G^n(.)\}_{n\geq 0}$ et $\{\bar{G}^n(.)\}_{n\geq 0}$ sont deux suites croissantes de fonctions et pour tout $n \geq 0$, $G^n(.) \geq g(.)$ et $\bar{G}^n(.) \geq \bar{g}(.)$.

Ces nouvelles notations nous permettront d'écrire la fonction s (respectivement $\bar{s}$) sous la forme d'une limite de fonctions. On utilise [81] et [46] pour démontrer le résultat suivant :

Lemme 2.2.7 *Les assertions suivantes sont vraies :*
(1) Soit g une fonction continue telle que $g(.) \geq C > -\infty$. Supposons de plus que $\mathbb{P}_v\left(liminf_{t\downarrow 0} g(V_t) \geq g(v)\right) = 1$. Alors

$$s(v) = lim_{n\to\infty} G^n(v) \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}_+^*$$

et s est semi-continue inférieurement.
(2) Sous l'hypothèse 2.2.1, si de plus le processus $t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est semi-continu inférieurement à droite sur les trajectoires (c'est à dire que pour tout $t \geq 0$, $Y_t \leq liminf_{s\downarrow t} Y_s$) et s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{g}(.) \geq C > -\infty$, alors

$$\bar{s}(v) = lim_{n\to\infty} \bar{G}^n(v) \text{ pour tout } v \in \mathbb{R}_+^*$$

et $\bar{s}$ est semi-continue inférieurement.

Preuve
(1) Dans le lemme 5 page 121 de [81], l'auteur montre que si X est un processus de Feller et g une fonction continue telle que $g(.) \geq C > -\infty$, alors la fonction $v \mapsto lim_{n\to\infty} G^n(v)$ est s.c.i et est la plus petite fonction excessive (c'est à dire que pour tout $t \geq 0$ et $v \in \mathbb{R}_+^*$, $\mathbb{E}_v(f(V_t)) \leq f(v)$) qui majore g.

Dans le théorème 1 page 124 de [81], il est démontré le résultat suivant : si $\mathbb{P}_v\left(liminf_{t\downarrow 0} g(V_t) \geq g(v)\right) = 1$ et $\mathbb{E}_v\left[sup_{t\geq 0} - min(g(V_t), 0)\right] < \infty$, alors s de (2.1) est la plus petite fonction excessive qui majore g.

Ainsi $s(v) = lim_{n\to\infty} G^n(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+^*$ et elle est semi-continue inférieurement.

(2) Dans le théorème 2.54 page 152 de [46], l'auteur montre que si le processus

$t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est de classe D, s.c.i à droite sur les trajectoires et si la fonction $\bar{g}$ est positive, alors $\bar{s}$ de (2.2) est égale à $\bar{s}(v) = lim_{n\to\infty}\bar{G}^n(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}_+^*$. La positivité de la fonction est utilisée dans la démonstration pour appliquer le lemme de Fatou. Lorsque la fonction $\bar{g}$ n'est pas positive, il suffit de supposer $\bar{g}(.) \geq C > -\infty$.

Le processus $Z_t = (t,\ X_t),\ t \geq 0$ est un processus de Feller. Soit g la fonction définie par $g(t,x) = e^{-rt}\bar{g}(e^x)$. On conclut avec le lemme 5 page 121 de [81]. □

Remarque 2.2.8 *Sous les hypothèses du lemme 2.2.7* (1)*, si $v \in E$, alors*

$$G^n(v) = g(v) \quad \textit{pour tout} \quad n \geq 0.$$

En effet, par définition de E, si $v \in E$ alors $s(v) = g(v)$, soit $lim_{n\to\infty}G^n(v) = g(v)$. Or la suite $\{G^n(.)\}_{n\geq 0}$ est croissante et minorée par $g(.)$, d'où la conclusion.

De manière analogue, sous les hypothèses du lemme 2.2.7 (2)*, si $v \in \bar{E}$, alors*

$$\bar{G}^n(v) = \bar{g}(v) \quad \textit{pour tout} \quad n \geq 0.$$

2.3. Cas où l'ensemble E ou $\bar{E} = \emptyset$

Dans cette section nous donnons une condition suffisante pour que les ensembles E et $\bar{E}$ soient vides. Dans ce cas les plus petits temps d'arrêt optimaux des problèmes (2.1) et (2.2) (qui coïncident avec les premiers temps d'entrée dans E et $\bar{E}$) sont presque sûrement infinis.

La proposition suivante s'inspire du théorème 3.1 page 7 de [85]. Dans [85], l'auteur considère un problème de type (2.2) et donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'ensemble $\bar{E}$ soit vide dans le cas où le processus X est une diffusion et la fonction $\bar{g}$ vérifie une certaine hypothèse. Plus précisément, dans [85], le processus V est solution de l'équation différentielle stochastique suivante $dV_t = (r - \delta(V_t))V_t dt + \sigma(V_t)V_t dW_t$ où W un mouvement brownien standard et les fonctions δ et σ sont bornées, positives et continues. De plus la fonction $\bar{g}$ est supposée continue et vérifiant les conditions suivantes :
(1) il existe $x_0 \in \mathbb{R}_+$ tel que $\bar{g}(x_0) > 0$,
(2) $\bar{g}'$ et $\bar{g}''$ existe sur $\mathbb{R}_+ - D$ où D est un ensemble dénombrable sur lequel la fonction $\bar{g}$ est dérivable une fois (respectivement deux fois) à droite et à gauche,
(3) il existe C et $p > 0$ tels que pour tout $x \notin D$, $|\bar{g}(x)| + |\bar{g}'(x)| + |\bar{g}''(x)| \leq C(1 + |x|^p)$,
(4) $g(0^+) < \infty$ et $0 < lim_{x\to\infty}\frac{\bar{g}(x)}{\phi(x)} < \infty$ où ϕ est la fonction strictement croissante, solution de $\frac{1}{2}x^2\sigma^2(x)^2u'' + x(r - \delta(x))u' = ru$.
Sous ces hypothèses, l'auteur montre que $\bar{E} = \emptyset$ si et seulement si pour tout $v > 0$,

$$liminf_{t\to\infty}\mathbb{E}_v\left(e^{-rt}\bar{g}(V_t)\right) > g(v).$$

Ici le cadre étant plus général, nous ne pouvons donner qu'une condition suffisante.

Proposition 2.3.1 *(1) Sous l'hypothèse 2.2.1, l'ensemble E est vide si pour tout $v > 0$ l'inégalité suivante est satisfaite*

$$sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v[g(V_t)] > g(v).$$

(2) Sous l'hypothèse 2.2.1, si le processus $t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est semi-continu inférieurement à droite sur les trajectoires et s'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{g}(.) \geq C > -\infty$, alors $\bar{E}$ est vide si pour tout $v > 0$ l'inégalité suivante est satisfaite

$$sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-rt}\bar{g}(V_t)] > \bar{g}(v).$$

Preuve
Seule la première partie de la proposition est démontrée, la démonstration du point (2) étant similaire.
Soit $v > 0$. Par définition de s

$$s(v) = sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left(g(V_\tau)\right) \geq sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v\left(g(V_t)\right) > g(v).$$

Donc pour tout $v > 0$ on a $s(v) > g(v)$ et l'ensemble E est vide. □

La sous-partie suivante est illustrée par un exemple où X n'est pas un processus de Lévy, mais de Feller et le couple $(V,\ \bar{g})$ vérifie les hypothèses du deuxième point de la proposition 2.3.1. Dans ce cas particulier $\bar{E} = \emptyset$ et par conséquence $\tau_{\bar{E}} = \infty$. La fonction $\bar{g}$ utilisée dans l'exemple suivant est la même que celle de l'exemple 3.1 de [85] où est considéré un processus de la forme $V_t = ve^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t},\ t \geq 0$.

Exemple 2.3.2 *Soit le processus*

$$X : t \mapsto X_t = rt + 1 - e^{-|W_t|}$$

où $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard.

Le processus X n'est pas de Lévy, mais de Feller.

Soit $V = ve^X$ et $\bar{g} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\bar{g}(v) = min\left(v - 1, (1-\varepsilon)v - (1-2\varepsilon)\right) \quad avec \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{2}.$$

La fonction $\bar{g}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $v > 0$

$$\bar{g}(v) = (v-1)\mathbf{1}_{v\leq 2} + \left[(1-\varepsilon)v - (1-2\varepsilon)\right]\mathbf{1}_{v>2} \geq -1.$$

$$Ainsi \quad e^{-rt}\bar{g}(V_t) = e^{-rt}(V_t - 1)\mathbf{1}_{V_t\leq 2} + e^{-rt}\left[(1-\varepsilon)V_t - (1-2\varepsilon)\right]\mathbf{1}_{V_t>2}.$$

Comme $\mathbf{1}_{V_t>2} = 1 - \mathbf{1}_{V_t\leq 2}$, on obtient

$$\begin{aligned} e^{-rt}\bar{g}(V_t) =& e^{-rt}\left[(1-\varepsilon)V_t - (1-2\varepsilon)\right] + e^{-rt}\varepsilon(V_t - 2)\mathbf{1}_{V_t\leq 2} \\ =&(1-\varepsilon)ve^{1-e^{-|W_t|}} - e^{-rt}(1-2\varepsilon) + e^{-rt}\varepsilon(V_t-2)\mathbf{1}_{V_t\leq 2}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Les processus $t \mapsto e^{1-e^{-|W_t|}}$ et $t \mapsto -e^{-rt}(1-2\varepsilon) + e^{-rt}\varepsilon(V_t - 2)\mathbf{1}_{V_t \leq 2}$ sont bornés, ils sont donc de classe D. Ainsi $\bar{g} \in \mathcal{D}^r$. Le processus V est continu, donc en particulier semi-continu inférieurement à droite sur les trajectoires et les hypothèses de la proposition 2.3.1 sont vérifiées. Ainsi, en utilisant l'égalite (2.3),

$$\begin{aligned} sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-rt}\bar{g}(V_t)] =& sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v\left[(1-\varepsilon)ve^{1-e^{-|W_t|}} - e^{-rt}(1-2\varepsilon) + e^{-rt}\varepsilon(V_t-2)\mathbf{1}_{V_t\leq 2}\right] \\ \geq & sup_{t\geq 0}(1-\varepsilon)v - (1-2\varepsilon)e^{-rt} - 2\varepsilon e^{-rt}\mathbb{P}_v(V_t \leq 2) \\ \geq & (1-\varepsilon)v. \end{aligned}$$

où pour la première inégalité on a utilisé le fait que $\mathbb{E}(e^{1-e^{-|W_t|}}) \geq 1$ et la majoration $e^{-rt}\varepsilon V_t \mathbf{1}_{V_t\leq 2} \geq 0$. Pour passer de la première à la deuxième inégalité il suffit de remarquer que

$$-(1-2\varepsilon)e^{-rt} - 2\varepsilon e^{-rt}\mathbb{P}_v(V_t \leq 2) = -e^{-rt} + 2\varepsilon e^{-rt}(1 - \mathbb{P}_v(V_t \leq 2)) \geq -e^{-rt}.$$

Ainsi $sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-rt}\bar{g}(V_t)] \geq (1-\varepsilon)v > \bar{g}(v)$. D'après la proposition 2.3.1, $\bar{E} = \emptyset$ et le plus petit temps d'arrêt optimal $\tau_{\bar{E}}$ du problème $sup_{\tau\geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau)]$ est infini presque sûrement.

2.4. Le temps d'arrêt optimal – temps d'atteinte

Le but de cette section est de donner une condition suffisante pour que E (respectivement $\bar{E}$) soit un intervalle de la forme $]0,\ b]$ ou $[b,\ \infty[$. De plus nous proposons une caractérisation du seuil optimal.

2.4.1. Cas où les ensembles E et $\bar{E}$ sont de la forme $]0,\ b]$ ou $[b,\ \infty[$

Nous introduisons les fonctions suivantes :

Définition 2.4.1 *Soit $\varepsilon_t : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et $\bar{\varepsilon}_t : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fonctions définies par*

$$\varepsilon_t(v) = \mathbb{E}_v(g(V_t)) - g(v) \quad et \quad \bar{\varepsilon}_t(v) = \mathbb{E}_v(e^{-rt}\bar{g}(V_t)) - \bar{g}(v).$$

Si ces fonctions sont monotones, la proposition suivante montre que les ensembles E et $\bar{E}$ sont des intervalles de la forme $]0,\ b]$ ou $[b,\ \infty[$.

Proposition 2.4.2 *(1) Sous l'hypothèse 2.2.1, on suppose que $\mathbb{P}_v\left(lim_{t\downarrow 0}g(V_t) = g(v)\right) = 1$ et que la fonction ε_t est croissante pour tout $t \geq 0$. Alors si $v \in E$, $]0,\ v] \subset E$.*
(2) Sous l'hypothèse 2.2.1, on suppose que la fonction $\bar{\varepsilon}_t$ est croissante pour tout $t \geq 0$, que le processus $t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est semi-continu inférieurement à droite et qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{g}(.) \geq C > -\infty$. Alors si $v \in \bar{E}$, $]0,\ v] \subset \bar{E}$.

Preuve
Seule la première partie de la proposition est démontrée, la démonstration du point (2) étant similaire.

Il suffit de montrer que

$$G^n(v^*) - g(v^*) \leq G^n(v) - g(v) \;\; \forall\, n \geq 0, \; \forall\, 0 < v^* \leq v. \tag{2.4}$$

Une fois démontrée cette relation, si $v \in E$, alors d'après la remarque 2.2.8, $G^n(v) = g(v)$ pour tout $n \geq 0$. La relation (2.4) implique $G^n(v^*) - g(v^*) \leq 0$ pour tout $n \geq 0$. Comme par construction de G^n, l'inégalité dans l'autre sens (c'est à dire $G^n(v^*) \geq g(v^*)$) est vraie, alors on a l'égalité $G^n(v^*) = g(v^*)$ pour tout $n \geq 0$. En conséquance $s(v^*) = g(v^*)$ et $v^* \in E$ d'après la définition 2.2.5. Ainsi si $v \in E$, alors tout $v^* \leq v$ appartient à E et $]0, v] \subset E$.

On montre la relation (2.4) par récurrence.

1) $n = 1$

Soit $0 < v^* \leq v$, ainsi comme la fonction ε_t est croissante on a

$$\mathbb{E}_{v^*}(g(V_t)) - g(v^*) \leq \mathbb{E}_v(g(V_t)) - g(v) \;\; \forall\, t \geq 0.$$

On prend le supremum en t de chacun des termes :

$$\begin{aligned} sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_{v^*}(g(V_t)) - g(v^*) \leq & sup_{t\geq 0}\mathbb{E}_v(g(V_t)) - g(v), \quad \text{soit} \\ G^1(v^*) - g(v^*) \leq & G^1(v) - g(v). \end{aligned}$$

2) On suppose que la relation (2.4) est vraie pour n et on la montre pour $n+1$.

Prenons dans (2.4) $v^*V_s^1$ (respectivement vV_s^1) à la place de v^* (respectivement v) :

$$G^n(v^*V_s^1) - g(v^*V_s^1) \leq G^n(vV_s^1) - g(vV_s^1) \;\; ds \otimes d\mathbb{P} - \text{presque sûrement}.$$

On prend l'espérance de chacun des termes.

$$\mathbb{E}_1\left(G^n(v^*V_s^1) - g(v^*V_s^1)\right) \leq \mathbb{E}_1\left(G^n(vV_s^1) - g(vV_s^1)\right),$$

soit $\mathbb{E}_{v^*}\left(G^n(V_s) - g(V_s)\right) \leq \mathbb{E}_v\left(G^n(V_s) - g(V_s)\right).$

A partir de cette nouvelle relation, en utilisant la croissance de la fonction ε_t (plus précisément $\mathbb{E}_{v^*}(g(V_t)) - \mathbb{E}_v(g(V_t)) \leq g(v^*) - g(v)$ pour tout $t \geq 0$), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{v^*}\left(G^n(V_s)\right) \leq & \mathbb{E}_v\left(G^n(V_s)\right) + \mathbb{E}_{v^*}\left(g(V_s)\right) - \mathbb{E}_v\left(g(V_s)\right) \\ \leq & \mathbb{E}_v\left(G^n(V_s)\right) + g(v^*) - g(v), \end{aligned}$$

d'où $\mathbb{E}_{v^*}\left(G^n(V_s)\right) - g(v^*) \leq \mathbb{E}_v\left(G^n(V_s)\right) - g(v)$. On prend le supremum en s de chacun des termes dans cette dernière inégalité et on obtient

$$G^{n+1}(v^*) - g(v^*) \leq G^{n+1}(v) - g(v).$$

□

Corollaire 2.4.3 *Sous les hypothèses de la proposition 2.4.2, si les ensembles E et $\bar{E}$ ne sont pas vides, alors*
(1) $E =]0,\ b]$ et le temps d'arrêt τ_E est un temps d'atteinte de la forme $inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$ où $b = sup\{v | G^n(v) = g(v) \ \ \forall n \geq 0\}$.
(2) $\bar{E} =]0,\ \bar{b}]$ et le temps d'arrêt $\tau_{\bar{E}}$ est un temps d'atteinte de la forme $inf\{t \geq 0 : V_t \leq \bar{b}\}$ où $\bar{b} = sup\{v | \bar{G}^n(v) = \bar{g}(v) \ \ \forall n \geq 0\}$.

Preuve
(1) Supposons $E \neq \emptyset$ et $v \in E$. D'après la proposition 2.4.2, $]0, v] \subset E$.
Soit $b = sup\{v | s(v) = g(v)\} = sup\{v | G^n(v) = g(v) \ \ \forall n \geq 0\}$. Ainsi $]0, b[\subset E$. Vérifions maintenant que $b \in E$. D'après le lemme 2.2.7, la fonction s est s.c.i., donc

$$s(b) \leq liminf_{v \to b, v < b} s(v) = liminf_{v \to b, v < b} g(v) = g(b).$$

Par construction, $s(b) \geq g(b)$, d'où l'égalité $s(b) = g(b)$ et $b \in E$. Donc $]0, b] \subset E$.

Pour tout $v' > b$, $s(v') > g(v')$, donc $]b, \infty[\subset E^C$ et $E \subset]0, b]$, d'où l'égalité $E =]0, b]$ et $\tau_E = inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$.
(2) La preuve est analogue à celle du point (1). □

De la même manière nous pouvons montrer le résultat suivant :

Proposition 2.4.4 *(1) Sous l'hypothèse 2.2.1, si $\mathbb{P}_v\left(lim_{t \downarrow 0} g(V_t) = g(v)\right) = 1$ et si la fonction ε_t est décroissante pour tout $t \geq 0$ et l'ensemble E n'est pas vide, alors $E = [b,\ \infty[$ et le temps d'arrêt τ_E est un temps d'atteinte de la forme $inf\{t \geq 0 : V_t \geq b\}$ où $b = inf\{v | G^n(v) = g(v) \ \ \forall n \geq 0\}$.*
(2) Sous l'hypothèse 2.2.1, si la fonction $\bar{\varepsilon}_t$ est décroissante pour tout $t \geq 0$, le processus $t \to e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est semi-continu inférieurement à droite, il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $\bar{g}(.) \geq C > -\infty$ et $\bar{E} \neq \emptyset$, alors $\bar{E} = [\bar{b},\ \infty[$ et $\tau_{\bar{E}}$ est un temps d'atteinte de la forme $inf\{t \geq 0 : V_t \geq \bar{b}\}$ où $\bar{b} = inf\{v | \bar{G}^n(v) = \bar{g}(v) \ \ \forall n \geq 0\}$.

L'objet de la proposition suivante est de donner un processus X qui ne soit pas de Lévy, mais de Feller et une fonction $\bar{g}$ vérifiant les conditions de la proposition 2.4.4. Ainsi l'ensemble $\bar{E}$ sera de la forme $[\bar{b},\ \infty[$.

Proposition 2.4.5 *Soit X le processus vérifiant l'équation stochastique suivante*

$$dX_t = (m - |X_t|)^+ dt + \sigma dW_t,\ \ t \geq 0,\ \ X_0 = 0 \tag{2.5}$$

où $\sigma,\ m > 0$ et $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard. On pose

$$V = ve^X \ \ avec\ v > 0.$$

Soit $c > 0$ et $a > 0$ fixés. Si $r > 0$ tel que $r > ma + \frac{\sigma^2 a^2}{2}$, alors le plus petit temps d'arrêt optimal du problème

$$sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau)\right) \quad avec \ \ \bar{g}(v) = v^a - c \tag{2.6}$$

est de la forme

$$\tau^{\bar{b}} = inf\{t \geq 0 : V_t \geq \bar{b}\}.$$

La preuve de cette proposition est faite en deux étapes. Nous vérifions d'abord que le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme $\tau_{\bar{E}}$ et ensuite nous concluons avec la proposition 2.4.4.

Preuve
Le processus X est un processus de diffusion et la fonction $x \mapsto (m - |x|)^+$ est bornée Lipschitz ; X est donc un processus de Feller d'après [77] page 164.

Remarquons que $(m - |X_t|)^+ \leq m$ pour tout $t \geq 0$, ainsi le processus X est majoré par un processus de Lévy continu $\tilde{X}$ où $\tilde{X}_t = mt + \sigma W_t,\ t \geq 0$. Comme $r > ma + \frac{\sigma^2 a^2}{2}$, on applique le lemme 1.3.1 du premier chapitre et

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-rR_n + a\tilde{X}_{R_n}}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = 0$$

où le processus $\left(e^{-rt+a\tilde{X}_t},\ t \geq 0\right)$ est une surmartingale positive et
$R_n = inf\{t \geq 0 : e^{-rt+a\tilde{X}_t} \geq n\}$. En conséquence (théorème 4.1.7 de la section 4.1), ce processus est de classe D. Comme $t \mapsto e^{-rt+aX_t}$ est majoré par un processus de classe D, alors il est également de classe D. En effet

$$0 \leq lim_{\alpha\to\infty}sup_{T\in\Delta}\mathbb{E}_0\left(e^{-rT+aX_T}\mathbf{1}_{e^{-rT+aX_T}\geq\alpha}\right) \leq lim_{\alpha\to\infty}sup_{T\in\Delta}\mathbb{E}_0\left(e^{-rT+a\tilde{X}_T}\mathbf{1}_{e^{-rT+a\tilde{X}_T}\geq\alpha}\right) = 0.$$

Le processus $t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est la différence d'une fonction continue positive bornée $(t \mapsto ce^{-rt})$ et d'un processus de classe D $(t \mapsto ve^{-rt+aX_t})$; la fonction $\bar{g}$ appartient ainsi à l'ensemble $\mathcal{D}^r$.

Le processus $t \mapsto e^{-rt}\bar{g}(V_t)$ est continu. De plus la fonction $\bar{g}$ est minorée par $-c$. Les hypothèses de la remarque 2.2.4 sont vérifiées et le plus petit temps d'arrêt optimal est $\tau_{\bar{E}}$.

On peut conclure que $\tau_{\bar{E}}$ est un temps d'atteinte de la forme $inf\{t \geq 0 : V_t \geq \bar{b}\}$ en utilisant la proposition 2.4.4. En effet il suffit de vérifier que la fonction
$\bar{\varepsilon}_t(v) = \mathbb{E}_v(e^{-rt}\bar{g}(V_t)) - \bar{g}(v)$ est décroissante pour tout $t \geq 0$. Or

$$\bar{\varepsilon}_t(v) = v^a\mathbb{E}_0\left(e^{-rt+aX_t}\right) - ce^{-rt} - v^a + c = v^a\left[\mathbb{E}_0\left(e^{-rt+aX_t}\right) - 1\right] - ce^{-rt} + c$$

et

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-rt+aX_t}\right) - 1 \leq \mathbb{E}_0\left(e^{-rt+a\tilde{X}_t}\right) - 1 = e^{t(-r+ma+\frac{\sigma^2a^2}{2})} - 1 \leq 0.$$

□

La proposition 2.4.5 est vérifiée pour tout processus X, solution de l'équation stochastique suivante $dX_t = b(X_t)dt + \sigma dW_t,\ t \geq 0,\ Z_0 = 0$ où $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, Lipschitz, bornée. Si la fonction b est constante, alors le processus X est un processus de Lévy.

2.4.2. Caractérisation du seuil optimal

Quand l'ensemble E (respectivement $\bar{E}$) est de la forme $]0,\ b]$ ou $[b,\ \infty[$, le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (2.1) (respectivement (2.2)), noté $\tau(b)$, est de la forme $inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$ ou $inf\{t \geq 0 : V_t \geq b\}$ et le problème peut être réécrit sous la forme

$$s(v) = sup_{b \geq 0} \mathbb{E}_v \left[g(V_{\tau(b)}) \right] \quad (\text{respectivement} \quad \bar{s}(v) = sup_{b \geq 0} \mathbb{E}_v \left[e^{-r\tau(b)} \bar{g}(V_{\tau(b)}) \right]).$$

Le seuil optimal est défini par :

Définition 2.4.6 *Le seuil b^* est optimal pour le problème (2.1) (respectivement (2.2)) s'il vérifie l'égalité suivante*

$$\mathbb{E}_v \left[g(V_{\tau(b^*)}) \right] = sup_{b \geq 0} \mathbb{E}_v \left[g(V_{\tau(b)}) \right]$$
$$(\textit{respectivement} \ \ \mathbb{E}_v \left[e^{-r\tau(b^*)} \bar{g}(V_{\tau(b^*)} \right] = sup_{b \geq 0} \mathbb{E}_v \left[e^{-r\tau(b)} \bar{g}(V_{\tau(b)}) \right]).$$

Dans la suite, ξ_r est une variable aléatoire indépendante du processus V et de loi exponentielle de paramètre r. Le but de ce paragraphe est de caractériser le seuil optimal en termes de ξ_r.

Remarque 2.4.7 *La variable aléatoire ξ_r est une variable aléatoire sans mémoire, c'est à dire pour tous t, s positifs on a $\mathbb{P}(\xi_r \geq t+s | \xi_r \geq t) = \mathbb{P}(\xi_r \geq s)$. Donc $\xi_r - t$ conditionné à l'événement $\{\xi_r \geq t\}$ suit une loi exponentielle de paramètre r (la même loi que ξ_r).*

Nous adaptons une idée utilisée par Song [82] pour calculer la $\mathcal{F}$-intensité ou par Kyprianou [52] pour un problème particulier d'arrêt optimal.

La transformée de Laplace d'un $\mathcal{F}^V$-temps d'arrêt quelconque τ peut s'exprimer en fonction de ξ_r :

Lemme 2.4.8 *(lemme 3 page 4 de [82])*
Soit τ un $\mathcal{F}^V$-temps d'arrêt tel que $\mathbb{P}_v(\tau = 0) = 0$ et ξ_r une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre r indépendante de τ. Alors pour tout $r > 0$,

$$\mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau} \right) = \mathbb{P}_v(\tau \leq \xi_r).$$

Preuve
On intègre par rapport à ξ_r :

$$\mathbb{P}_v(\tau \leq \xi_r) = \int_0^\infty r e^{-rt} \mathbb{P}_v(\tau \leq t) dt.$$

On intègre par parties et on obtient

$$\mathbb{P}_v(\tau \leq \xi_r) = [-e^{-rt} \mathbb{P}_v(\tau \leq t)]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-rt} d\mathbb{P}_v(\tau \leq t) = \mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau} \right). \qquad \square$$

De plus nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.4.9 *Soit τ un $\mathcal{F}^V$-temps d'arrêt et ξ_r une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre r, indépendante de $\mathcal{F}^V_\infty$. Alors pour toutes fonctions boréliennes positives g et h*

$$\mathbb{E}\left[g(V_\tau)\mathbf{1}_{\tau\leq\xi_r}h(\xi_r-\tau)\right]=\mathbb{E}\left[g(V_\tau)\mathbf{1}_{\tau\leq\xi_r}\right]\mathbb{E}\left[h(\xi_r)\right]. \tag{2.7}$$

Preuve

Soit $t\geq 0$. On commence par montrer la relation (2.7) pour une fonction h de la forme $h(u)=\mathbf{1}_{u\leq t}$. Dans ce cas

$$\mathbb{E}\left[g(V_\tau)\mathbf{1}_{\tau\leq\xi_r}h(\xi_r-\tau)\right]=\mathbb{E}\left[g(V_\tau)\mathbf{1}_{\tau\leq\xi_r\leq\tau+t}\right].$$

On utilise l'indépendance de ξ_r et de $\mathcal{F}_\tau$ et on intègre par rapport à ξ_r.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[g(V_\tau)\mathbf{1}_{\tau\leq\xi_r\leq\tau+t}\right]=&\mathbb{E}\left[g(V_\tau)(e^{-r\tau}-e^{-r(\tau+t)})\right]\\=&\mathbb{E}\left[g(V_\tau)e^{-r\tau}\right](1-e^{-rt})\\=&\mathbb{E}\left[g(V_\tau)e^{-r\tau}\right]\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\xi_r\leq t}\right].\end{aligned}$$

En appliquant le même raisonnement pour $h(.)=1$, on obtient $\mathbb{E}\left[g(V_\tau)e^{-r\tau}\right]=\mathbb{E}\left[g(V_\tau)\mathbf{1}_{\tau\leq\xi_r}\right]$, d'où la relation (2.7) pour $h(u)=\mathbf{1}_{u\leq t}$.

Soit $\mathcal{H}=\{h$ fonction borélienne vérifiant la relation (2.7)$\}$. $\mathcal{H}$ est un espace vectoriel qui contient les fonctions positives, les constantes et qui est stable par convergence monotone bornée.

Soit $t\geq 0$ et $\mathcal{C}=\{h,\ h(u)=\mathbf{1}_{u\leq t}\}$. L'espace $\mathcal{C}\subset\mathcal{H}$ est stable par multiplication et contient les constantes ; d'après le théorème 3.5 page 10 de [3], $\mathcal{H}$ contient les fonctions mesurables bornées par rapport à $\mathcal{C}$, c'est à dire les fonctions boréliennes bornées.

En approchant une fonction h positive par $h\wedge n$ et en utilisant la convergence monotone, la relation (2.7) est vérifiée pour tout fonction h positive. □

Nous introduisons les processus et les $\mathcal{F}^V$-temps d'arrêt suivants :

Définition 2.4.10 *Les processus $\underline{V}$ et $\overline{V}$ sont définis par*

$$\underline{V}_t=essinf_{s\leq t}V_s\quad et\quad \overline{V}_t=esssup_{s\leq t}V_s,\ t\geq 0.$$

Soit τ_b et τ^b les $\mathcal{F}^V$-temps d'atteinte de la forme

$$\tau_b=inf\{t\geq 0:V_t\leq b\}\quad et\quad \tau^b=inf\{t\geq 0:V_t\geq b\}.$$

Si nous cherchons à déterminer le seuil optimal du problème $sup_{b\geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})]$ (respectivement $sup_{b\geq 0}\mathbb{E}_v[e^{-r\tau^b}\bar{g}(V_{\tau^b})]$), nous avons une caractérisation de ce seuil en fonction de $\underline{V}_{\xi_r}$ (respectivement $\overline{V}_{\xi_r}$). Dans la suite nous énonçons deux propositions et ensuite nous les appliquons dans un cas particulier pour le calcul du seuil optimal.

Proposition 2.4.11 *Soit τ_b le temps d'atteinte introduit dans la définition 2.4.10 et $v > b$. S'il existe une fonction décroissante $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que :*
(1) $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right) = \mathbb{E}_v\left(f(\underline{V}_{\xi_r})\mathbf{1}_{\underline{V}_{\xi_r}\leq b}\right)$ pour tout $b \geq 0$,
(2) L'équation $f(b) = 0$ a une unique solution positive notée b^*,
alors $sup_{b\geq 0}\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right) = \mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_{b^*}}\bar{g}(V_{\tau_{b^*}})\right)$.

Preuve
Comme $v > b$, alors $\mathbb{P}_v(\tau_b = 0) = 0$.
Pour que b^* soit optimal, il suffit de montrer que pour tout $b \geq 0$,

$$\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_{b^*}}\bar{g}(V_{\tau_{b^*}})\right) \geq \mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right).$$

On distingue deux cas selon la position de b par rapport à b^*.
Pour tout $b < b^*$:

$$\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_{b^*}}\bar{g}(V_{\tau_{b^*}}) - e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right) = \mathbb{E}_v\left(f(\underline{V}_{\xi_r})\mathbf{1}_{b<\underline{V}_{\xi_r}\leq b^*}\right).$$

Or f est une fonction décroissante, donc $f(\underline{V}_{\xi_r})\mathbf{1}_{b<\underline{V}_{\xi_r}\leq b^*} \geq f(b^*)\mathbf{1}_{b<\underline{V}_{\xi_r}\leq b^*} = 0$. D'où $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_{b^*}}\bar{g}(V_{\tau_{b^*}}) - e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right) \geq 0$ et $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_{b^*}}\bar{g}(V_{\tau_{b^*}})\right) \geq \mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right)$ pour tout $b < b^*$.
Pour tout $b > b^*$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_{b^*}}\bar{g}(V_{\tau_{b^*}}) - e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right) =& \mathbb{E}_v\left(-f(\underline{V}_{\xi_r})\mathbf{1}_{b^*<\underline{V}_{\xi_r}\leq b}\right)\\ \geq& \mathbb{E}_v\left(-f(b^*)\mathbf{1}_{b^*<\underline{V}_{\xi_r}\leq b}\right) = 0\end{aligned}$$

et $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_{b^*}}\bar{g}(V_{\tau_{b^*}})\right) \geq \mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}\bar{g}(V_{\tau_b})\right)$ pour tout $b > b^*$. □

De manière analogue nous pouvons montrer le résultat suivant :

Proposition 2.4.12 *Soit τ^b le temps d'atteinte introduit dans la définition 2.4.10 et $v < b$. S'il existe une fonction croissante $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ telle que :*
(1) $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^b}\bar{g}(V_{\tau^b})\right) = \mathbb{E}_v\left(f(\overline{V}_{\xi_r})\mathbf{1}_{\overline{V}_{\xi_r}\geq b}\right)$ pour tout $b \geq 0$,
(2) L'équation $f(b) = 0$ a une unique solution positive notée b^*,
alors $sup_{b\geq 0}\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^b}\bar{g}(V_{\tau^b})\right) = \mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^{b^*}}\bar{g}(V_{\tau^{b^*}})\right)$.

Le but de la proposition suivante est de donner un exemple où la fonction f est de la forme $\alpha v^a - c$.

Proposition 2.4.13 *Soit V le processus introduit dans la proposition 2.4.5 : $V = ve^X$ avec $v > 0$ et X le processus vérifiant l'équation stochastique suivante*

$$dX_t = (m - |X_t|)^+ dt + \sigma dW_t,\ t \geq 0,\ X_0 = 0$$

où $\sigma,\ m > 0$ et $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard.

Sous les hypothèses de la proposition 2.4.5, le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (2.6), soit

$$sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau} \bar{g}(V_\tau) \right) \quad avec \quad \bar{g}(v) = v^a - c$$

est

$$\tau^{b^*} = inf\{t \geq 0 : V_t \geq b^*\} \quad où \quad b^* = \left(c\mathbb{E}_1 \left(\overline{V}^a_{\xi_r} \right) \right)^{1/a}.$$

Le lemme suivant permet d'écrire $\mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau^b} \bar{g}(V_{\tau^b}) \right)$ sous la forme $\mathbb{E}_v \left(f(\overline{V}_{\xi_r}) \mathbf{1}_{\overline{V}_{\xi_r} \geq b} \right)$ avec $f : \mathbb{R}^*_+ \to \mathbb{R}$ une fonction croissante, ce qui nous permettra d'appliquer la proposition 2.4.12 pour montrer la proposition 2.4.13.

Lemme 2.4.14 *Pour tout $a > 0$ et $b > v$, les égalités suivantes sont vraies*

$$\mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau^b} V^a_{\tau^b} \right) = \frac{\mathbb{E}_v \left(\overline{V}^a_{\xi_r} \mathbf{1}_{\overline{V}_{\xi_r} \geq b} \right)}{\mathbb{E}_1 \left(\overline{V}^a_{\xi_r} \right)} \quad et \quad \mathbb{E}_v \left(e^{-r\tau_b} V^a_{\tau_b} \right) = \frac{\mathbb{E}_v \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \mathbf{1}_{\underline{V}_{\xi_r} \leq b} \right)}{\mathbb{E}_1 \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \right)}.$$

Preuve

Seule la deuxième égalité est démontrée, la démonstration de l'autre relation étant analogue.

On remarque que $\{\omega : \underline{V}_{\xi_r(\omega)} \leq b\} = \{\omega : \tau_b(\omega) \leq \xi_r(\omega)\}$, ainsi

$$\mathbb{E}_v \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \mathbf{1}_{\underline{V}_{\xi_r} \leq b} \right) = \mathbb{E}_v \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \mathbf{1}_{\tau_b \leq \xi_r} \right).$$

En conditionnant par $\mathcal{F}^V_{\tau_b} \vee \{\tau_b \leq \xi_r\}$ sous l'espérance, on obtient :

$$\mathbb{E}_v \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \mathbf{1}_{\underline{V}_{\xi_r} \leq b} \right) = \mathbb{E}_v \left(V^a_{\tau_b} \mathbf{1}_{\tau_b \leq \xi_r} \mathbb{E}_v \left(\frac{\underline{V}^a_{\xi_r}}{V^a_{\tau_b}} \mid \mathcal{F}^V_{\tau_b}, \tau_b \leq \xi_r \right) \right).$$

Le processus V est un processus de Markov :

$$\frac{(\underline{V}^v_{\xi_r})^a}{(V^v_{\tau_b})^a} = (\underline{V}^1_{\xi_r - \tau_b})^a \circ \theta_{\tau_b},$$

le coefficient v (respectivement 1) représentant le point de départ du processus V et θ l'opérateur translation. D'après la propriété de Markov forte

$$\mathbb{E}_v \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \mathbf{1}_{\underline{V}_{\xi_r} \leq b} \right) = \mathbb{E}_v \left(V^a_{\tau_b} \mathbf{1}_{\tau_b \leq \xi_r} \mathbb{E}_1 \left(\underline{V}^a_u \right) |_{u = \xi_r - \tau_b} \right).$$

On applique le lemme 2.4.9 à $h(u) = \mathbb{E}_1 \left(\underline{V}^a_u \right)$:

$$\mathbb{E}_v \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \mathbf{1}_{\underline{V}_{\xi_r} \leq b} \right) = \mathbb{E}_v \left(V^a_{\tau_b} \mathbf{1}_{\tau_b \leq \xi_r} \right) \mathbb{E}_1 \left(\underline{V}^a_{\xi_r} \right). \tag{2.8}$$

Or en conditionnant par rapport à $\mathcal{F}^V_{\tau_b}$ sous la première espérance du membre à droite de (2.8) et ensuite en intégrant par rapport à ξ_r on obtient
$\mathbb{E}_v\left(V^a_{\tau_b}\mathbf{1}_{\tau_b\leq\xi_r}\right) = \mathbb{E}_v\left(V^a_{\tau_b}\int_{\tau_b}^{\infty} re^{-rt}dt\right) = \mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}V^a_{\tau_b}\right)$. Ainsi

$$\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau_b}V^a_{\tau_b}\right) = \frac{\mathbb{E}_v\left(\underline{V}^a_{\xi_r}\mathbf{1}_{\underline{V}_{\xi_r}\leq b}\right)}{\mathbb{E}_1\left(\underline{V}^a_{\xi_r}\right)}.$$

$\square$

Preuve de la proposition 2.4.13
D'après la proposition 2.4.5, le plus petit temps d'arrêt optimal est un temps d'atteinte de la forme $\tau^{\bar{b}} = inf\{t \geq 0 : V_t \geq \bar{b}\}$.

On cherche b maximisant $b \to \mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^b}(V^a_{\tau^b} - c)\right)$. D'une part, d'après le lemme 2.4.14,

$$\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^b}V^a_{\tau^b}\right) = \frac{\mathbb{E}_v\left(\overline{V}^a_{\xi_r}\mathbf{1}_{\overline{V}_{\xi_r}\geq b}\right)}{\mathbb{E}_1\left(\overline{V}^a_{\xi_r}\right)}.$$

D'autre part, d'après le lemme 2.4.8, $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^b}\right) = \mathbb{P}_v(\tau^b \leq \xi_r) = \mathbb{P}_v(\overline{V}_{\xi_r} \geq b)$. Ainsi l'espérance $\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^b}(V^a_{\tau^b} - c)\right)$ peut être écrite sous la forme

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_v\left(e^{-r\tau^b}(V^a_{\tau^b} - c)\right) =& \frac{\mathbb{E}_v\left(\overline{V}^a_{\xi_r}\mathbf{1}_{\overline{V}_{\xi_r}\geq b}\right)}{\mathbb{E}_1\left(\overline{V}^a_{\xi_r}\right)} - c\mathbb{E}_v(\mathbf{1}_{\overline{V}_{\xi_r}\geq b})\\ =&\mathbb{E}_v\left(\left(\frac{\overline{V}^a_{\xi_r}}{\mathbb{E}_1\left(\overline{V}^a_{\xi_r}\right)} - c\right)\mathbf{1}_{\overline{V}_{\xi_r}\geq b}\right).\end{aligned}$$

La fonction $v \to f(v) = \frac{v^a}{\mathbb{E}_1(\overline{V}^a_{\xi_r})} - c$ est croissante et l'équation $f(v) = 0$ a une unique solution positive $b^* = \left(c\mathbb{E}_1\left(\overline{V}^a_{\xi_r}\right)\right)^{1/a}$. D'après la proposition 2.4.12, le seuil optimal est b^*. $\square$

3. Application à la finance. Dette risquée

Le but de ce chapitre est de donner un exemple d'application des problèmes de contrôle optimal à la finance, plus précisément au risque de crédit d'une entreprise. Dans le modèle présenté ici, la valeur des actifs de la firme est décrite par l'intermédiaire d'un processus stochastique et la situation de défaut est caractérisée à partir de l'évolution de cette valeur. Nous commençons ce chapitre en introduisant les notations utilisées (section 3.1). Le problème considéré est un problème d'arrêt optimal où on cherche à déterminer le "temps optimal de faillite" en minimisant la valeur de la dette de l'entreprise (section 3.2). Nous terminons ce chapitre avec la valeur de la dette (section 3.3) et la loi du temps optimal de faillite (section 3.4).

3.1. Notations

Dans cette partie toutes les variables économiques sont définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Sur cet espace on considère V un processus stochastique représentant la valeur des actifs d'une entreprise et vérifiant l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dV_t = gV_{t-}dt + \sigma V_{t-}dW_t - V_{t-}dN_t,\ t \geq 0,\ V_0 > 0, \tag{3.1}$$

où $g \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard et $(N_t,\ t \geq 0)$ est un processus de Poisson d'intensité constante positive θ.

Pour trouver la forme explicite du processus V nous utilisons les résultats de [61] ou [38] ; V est une exponentielle de Doléans.

Proposition 3.1.1 *(théorème 4.61 et 4.64 page 59 de [38])*
Soit X une semimartingale et Y un processus càdlàg adapté vérifiant l'équation

$$dY = Y_{-}dX,\ Y_0 = 1. \tag{3.2}$$

L'équation (3.2) a une unique solution càdlàg adaptée. Cette solution est une semimartingale de la forme

$$\mathcal{E}(X)_t = e^{X_t - X_0 - \frac{1}{2}<X^c, X^c>_t} \prod_{s\leq t}(1+\Delta X_s)e^{-\Delta X_s}.$$

De plus si $T = inf\{t \geq 0 : \Delta X_t = -1\}$, *alors* $\mathcal{E}(X)_t \neq 0$ *sur* $\{t < T\}$ *et* $\mathcal{E}(X)_t = 0$ *sur* $\{t \geq T\}$.

Nous appliquons cette proposition à $Y_t = V_t^1,\ t \geq 0$ (où V^1 est le processus V vérifiant $V_0 = 1$) et $X_t = gt + \sigma W_t - N_t,\ t \geq 0$. Ainsi

$$V_t^1 = e^{(g-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t - N_t} \prod_{s \leq t} (1 - \Delta N_s) e^{\Delta N_s},\ t \geq 0.$$

Soit T_1 le premier instant de saut du processus N, alors $-\Delta N_{T_1} = -1$. D'après la proposition 3.1.1 appliquée à $T = T_1$ et le processus V a la forme suivante :

$$V_t = \begin{cases} V_0 e^{(g-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t} & sur\ \{t < T_1\} \\ 0 & sur\ \{t \geq T_1\}. \end{cases}$$

La filtration complétée càd, engendrée par V est notée $\mathcal{F}^V$: $\mathcal{F}_t^V = \sigma(V_s,\ s \leq t)$.

3.2. Le problème d'arrêt optimal

Nous supposons que les actionnaires ont le droit de décider le moment de liquidation de la firme à tout $\mathcal{F}^V$-temps d'arrêt τ. Ils choisiront l'instant qui minimise la dette de l'entreprise, ce qui correspond à la résolution du problème d'arrêt optimal suivant :

$$D_0 = inf_{\tau \in \Delta} \mathbb{E}_{V_0} \left(\int_0^\tau e^{-rs} dC_s + e^{-r\tau} V_\tau^a \right) \tag{3.3}$$

où $r > 0$ représente le taux d'actualisation, $a \in]0,1[$, Δ est l'ensemble des $\mathcal{F}_\cdot^V$-temps d'arrêt représentant les instants de faillite possibles et $C \in \mathcal{C}$ l'ensemble des processus croissants positifs représentant les coupons payés par l'entreprise (il s'agit d'un paiement régulier réalisé par l'entreprise qui a émis des obligations, et reçu par le détenteur d'une obligation au cours de la durée de vie de ce placement).

Le premier terme de (3.3), soit $\mathbb{E}_{V_0}\left(\int_0^\tau e^{-rs} dC_s\right)$, représente la valeur attendue actualisée de tous les coupons que la firme est obligée de payer avant la liquidation. Le deuxième terme $\mathbb{E}_{V_0}\left(e^{-r\tau} V_\tau^a\right)$ représente la valeur attendue actualisée de liquidation, c'est à dire la valeur attribuée à une entreprise qui doit être vendue en raison des pressions exercées par ses créanciers. La valeur de liquidation ne reflète pas la valeur réelle d'une entreprise ; dans la plupart des cas, elle est sensiblement inférieure à la valeur comptable, ce qui explique la valeur inférieure à 1 de l'exposant a.

Définition 3.2.1 *Le temps d'arrêt* τ^* *est optimal pour le problème (3.3) s'il satisfait la relation suivante :*

$$\mathbb{E}_{V_0} \left(\int_0^{\tau^*} e^{-rs} dC_s + e^{-r\tau} V_{\tau^*}^a \right) = inf_{\tau \in \Delta} \mathbb{E}_{V_0} \left(\int_0^\tau e^{-rs} dC_s + e^{-r\tau} V_\tau^a \right).$$

Désormais nous nous restreignons à un ensemble particulier de processus croissants positifs, noté $\mathcal{C}(m)$, plus précisément aux processus vérifiant $dC_s = e^{ms}ds$, $m \geq 0$ fixé. Le problème (3.3) devient

$$D_0 = inf_{\tau \in \Delta} \mathbb{E}_{V_0} \left(\int_0^\tau e^{-(r-m)s} ds + e^{-r\tau} V_\tau^a \right).$$

Hypothèse 3.2.2 *$m < r$.*

Nous introduisons la notation suivante :

Notation 3.2.3 *$r' = r - m > 0$.*

On remarque que $\int_0^\tau e^{-(r-m)s} ds = \int_0^\tau e^{-r's} ds = \frac{1}{r'}(1 - e^{-r'\tau})$. Nous cherchons donc $\tau \in \Delta$ minimisant

$$\tau \to \mathbb{E}_{V_0} \left(\frac{1}{r'}(1 - e^{-r'\tau}) + e^{-r\tau} V_\tau^a \right).$$

En suivant [31], nous introduisons le processus intermédiaire suivant :

Notation 3.2.4 *$t \mapsto \nu_t = e^{-mt} V_t^a$.*

En appliquant la formule de Itô entre 0 et t au processus $s \mapsto e^{-ms} V_s^a$, le processus ν vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$d\nu_t = \left[ag - m + \frac{1}{2} a(a-1)\sigma^2 \right] \nu_{t-} dt + a\sigma \nu_{t-} dW_t - \nu_{t-} dN_t, \; t \geq 0, \; \nu_0 = V_0^a > 0.$$

D'après la proposition 3.1.1, ce processus a la forme suivante :

$$\nu_t = \begin{cases} \nu_0 e^{(ag - m - \frac{a\sigma^2}{2})t + a\sigma W_t} & sur \; \{t < T_1\} \\ 0 & sur \; \{t \geq T_1\}. \end{cases}$$

Soit $\mathcal{F}^\nu$ la filtration complétée càd, engendrée par ν : $\mathcal{F}_t^\nu = \sigma(\nu_s, \; s \leq t)$.

Remarque 3.2.5 *Les filtrations complétées càd, engendrées par les processus V et ν sont identiques.*

Le but de ces nouvelles notations est de réécrire le problème d'arrêt optimal sous une autre forme afin de pouvoir appliquer les résultats classiques d'arrêt optimal de [46], [47] et [81] que nous rappelons dans la section 4.1. Nous sommes ramenés à minimiser sur l'ensemble des $\mathcal{F}^\nu_.$-temps d'arrêt Δ :

$$\tau \to D_0 = \mathbb{E}_{\nu_0} \left(\frac{1}{r'}(1 - e^{-r'\tau}) + e^{-r'\tau} \nu_\tau \right),$$

soit à maximiser sur Δ :

$$\tau \to \mathbb{E}_{\nu_0}\left(e^{-r'\tau} f(\nu_\tau)\right) \quad \text{avec} \quad f(x) = 1/r' - x. \tag{3.4}$$

Ce problème est de la forme (1.7). En effet les paramètres r, $\frac{\alpha}{r-\theta(1)}$ et $\frac{c}{r}$ du modèle du premier chapitre deviennent ici r', 1 et $\frac{1}{r'}$.

Proposition 3.2.6 *Sous l'hypothèse 3.2.2, soit a_+ défini par*

$$a_+ = \frac{1}{2} - \frac{g}{\sigma^2} + \frac{1}{\sigma^2}\sqrt{\left(\frac{\sigma^2}{2} - g\right)^2 + 2\sigma^2(r+\theta)}.$$

Alors $a_+ > 0$ et pour tout $a \in]0,\ a_+ \wedge 1[$, les deux assertions suivantes sont vraies :
(1) Le processus $Z : t \mapsto e^{-r't}\nu_t$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\nu)$-surmartingale positive,
(2) Le processus $Y : t \mapsto e^{-r't}\left(\frac{1}{r'} - \nu_t\right)$ converge dans L^1 et presque sûrement vers 0 quand t tend vers ∞.

Preuve
Le nombre réel a_+ est la plus grande des racines du polynôme

$$P(x) = \frac{\sigma^2}{2}x^2 + x\left(g - \frac{\sigma^2}{2}\right) - r - \theta.$$

Le produit des racines de P est $\frac{-r-\theta}{\sigma^2/2} < 0$, donc le polynôme P admet deux racines non nulles de signes opposés. Le coefficient dominant de P est positif, donc $P(x) < 0$ pour $x \in [0,\ a_+[$.

(1) La clé de la démonstration est le choix du paramètre a. Le processus Z est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\nu)$-semimartingale dont la partie non-martingale est

$$\left[-r' + ag - m - \theta + \frac{1}{2}a(a-1)\sigma^2\right]\nu_{t-}dt = P(a)\nu_{t-}dt.$$

Par le choix de a, le drift du processus Z est négatif ; Z est donc une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\nu)$-surmartingale. Le processus ν est positif, donc le processus Z est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\nu)$-surmartingale positive.

(2) Comme $\mathbb{E}_{\nu_0}(|Y_t|) \leq 1/r'e^{-r't} + \nu_0 e^{P(a)t}$ avec $P(a) < 0$, alors $Y_t \longrightarrow^{L^1} 0$.

Le processus $Y_.$ est la différence entre une fonction déterministe continue qui tend vers 0 et une surmartingale positive (donc qui converge presque sûrement). Ainsi le processus $Y_.$ converge presque sûrement quand t tend vers ∞. De plus la limite de Y dans L^1 est égale à 0, donc on a $Y_\infty = 0$ presque sûrement. □

Si dans le problème initial (3.3) on considère $a = 1$, l'hypothèse $P(1) = g - (r+\theta) < 0$ est nécessaire pour que Z soit une surmartingale positive.

Désormais nous travaillons sous l'hypothèse suivante :

Hypothèse 3.2.7 $0 < a < a_+ \wedge 1$ *avec* a_+ *défini dans la proposition 3.2.6.*

Proposition 3.2.8 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, le processus* $Y : t \mapsto e^{-r't}\left(\frac{1}{r'} - \nu_t\right)$ *est de classe D.*

La démonstration de cette proposition repose sur le résultat suivant de [44] :

Lemme 3.2.9 *(exercice 5.10 page 197 de [44])*
Soit $\mu \in \mathbb{R}^*$, $y \in \mathbb{R}$ *et* T_y *le temps d'arrêt défini par* $T_y = inf\{t \geq 0 : W_t + \mu t = y\}$. *Alors*

$$\mathbb{E}\left(e^{-\alpha T_y}\right) = e^{\mu y - |y|\sqrt{\mu^2+2\alpha}}.$$

Preuve de la proposition 3.2.8
Le processus $Y_.$ est la différence entre une fonction déterministe continue qui tend vers 0 et une surmartingale positive. La fonction $\left(t \to \frac{e^{-r't}}{r'}\right)$ est positive décroissante et majorée par $\frac{1}{r'}$, donc $\left(t \to \frac{e^{-r't}}{r'}\right)$ est de classe D. Le processus $\left(t \to Z_t = e^{-r't}\nu_t\right)$ est une surmartingale positive. D'après le théorème 4.1.7 de la section 4.1, pour que Z soit de classe D il suffit de vérifier que

$$lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-r'R_n}\nu_{R_n}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = 0 \text{ où } R_n = inf\{t \geq 0 : e^{-r't}\nu_t \geq n\}.$$

Dans notre cas, comme $e^{-r't}\nu_t = \nu_0 e^{(-r'+ag-m-\frac{a\sigma^2}{2})t+a\sigma W_t}\mathbf{1}_{t<T_1},\ t \geq 0$, alors

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-r'R_n}\nu_{R_n}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = n\mathbb{P}_0(R_n < T_1)$$

et $R_n = inf\{t \geq 0 : \frac{-r'+ag-m-\frac{a\sigma^2}{2}}{a\sigma}t + W_t = \frac{ln(n)}{a\sigma}\}$.

Les temps d'arrêt R_n et T_1 sont indépendants et T_1 est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre θ. D'après le lemme 2.4.8 du deuxième chapitre, on obtient :

$$\mathbb{P}_0(R_n < T_1) = \mathbb{E}_0\left(e^{-\theta R_n}\right).$$

On applique le lemme 3.2.9 à $\mu = \frac{-r'+ag-m-\frac{a\sigma^2}{2}}{a\sigma}$, $y = \frac{ln(n)}{a\sigma}$ et $\alpha = \theta$:

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-\theta R_n}\right) = e^{\frac{-r'+ag-m-\frac{a\sigma^2}{2}}{a^2\sigma^2}ln(n) - \frac{ln(n)}{a^2\sigma^2}\sqrt{(-r'+ag-m-\frac{a\sigma^2}{2})^2+2\theta a^2\sigma^2}}.$$

Ainsi

$$\mathbb{E}_0\left(e^{-r'R_n}\nu_{R_n}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = n^{1+\frac{-r'+ag-m-\frac{a\sigma^2}{2}}{a^2\sigma^2} - \frac{1}{a^2\sigma^2}\sqrt{(-r'+ag-m-\frac{a\sigma^2}{2})^2+2\theta a^2\sigma^2}}. \tag{3.5}$$

Il suffit de vérifier que l'exposant du membre droite de (3.5) est négatif, puisque dans ce cas en faisant tendre n vers infini, $lim_{n\to\infty}\mathbb{E}_0\left(e^{-r'R_n}\nu_{R_n}\mathbf{1}_{R_n<\infty}\right) = 0$.

On multiplie l'exposant du membre droite de (3.5) par $a^2\sigma^2$ et on vérifie que

$$a^2\sigma^2 - r' + ag - m - \frac{a\sigma^2}{2} - \sqrt{\left(-r' + ag - m - \frac{a\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\theta a^2\sigma^2} < 0,$$

soit que

$$P(a) + \theta + \frac{a^2\sigma^2}{2} - \sqrt{\left(P(a) + \theta - \frac{a^2\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\theta a^2\sigma^2} < 0$$

où $P(x) = \frac{\sigma^2}{2}x^2 + x\left(g - \frac{\sigma^2}{2}\right) - r' - m - \theta$.

Or

$$\left(P(a) + \theta - \frac{a^2\sigma^2}{2}\right)^2 + 2\theta a^2\sigma^2 = \left(P(a) + \theta + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right)^2 - 2P(a)a^2\sigma^2 > \left(P(a) + \theta + \frac{a^2\sigma^2}{2}\right)^2$$

puisque, par le choix de a, $P(a) < 0$.

Ainsi la surmartingale Z est de classe D. On en déduit que Y est de classe D. □

Nous introduisons la fonction suivante :

Notation 3.2.10 *Soit $\phi : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $\phi(x) = sup_{\tau\in\Delta}\mathbb{E}_x[Y_\tau]$.*

La fonction ϕ est notée s dans le premier chapitre.

Ainsi la dette sera égale à

$$D_0 = \frac{1}{r'} - \phi(\nu_0).$$

Remarque 3.2.11 *La fonction ϕ est strictement positive. En effet, puisque $T_1 \in \Delta$:*

$$\phi(x) \geq \mathbb{E}_x[Y_{T_1}] = \mathbb{E}_x\left[\frac{e^{-r'T_1}}{r'}\right] = \frac{\theta}{r'(r'+\theta)} > 0.$$

Le processus $(t \mapsto Y_t,\ t \geq 0)$ étant de classe D, s.c.s sur les trajectoires et de la forme $Y_t = e^{-r't}f(\nu_t),\ t \geq 0$, les résultats de contrôle optimal rappelés dans la section 4.1 s'appliquent :

Proposition 3.2.12 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, les assertions suivantes sont vraies :*
(1) $D_0 = 1/r' - J_0$, où J est l'enveloppe de Snell du processus Y vérifiant

$$J_t = e^{-r't}\phi(\nu_t),\ t \geq 0,$$

(2) Le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (3.4) est

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0,\ f(\nu_t) = \phi(\nu_t)\},$$

(3) Le processus $(e^{-r'(t\wedge\tau^*)}\phi(\nu_{t\wedge\tau^*}),\ t \geq 0)$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\nu)$-martingale.

3.3. La fonction ϕ

Dans cette partie on précise la forme de la fonction ϕ en fonction des paramètres du modèle. A partir des résultats classiques de contrôle optimal appliqués au problème (3.4), nous en déduisons les propriétés de la fonction ϕ, puis nous obtenons que le plus petit temps d'arrêt optimal est un temps d'atteinte. Ensuite nous concluons avec le calcul du seuil optimal et l'expression de ϕ.

Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, le problème d'arrêt optimal (3.4) est de la forme du problème (1.7) étudié dans le premier chapitre (les paramètres r, $\frac{\alpha}{r-\theta(1)}$ et $\frac{c}{r}$ du modèle du premier chapitre deviennent ici r', 1 et $\frac{1}{r'}$).

On applique le même raisonnement que dans la section 1.2 et nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.3.1 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7,*

$$\phi : x \mapsto sup_{\tau\in\Delta}\mathbb{E}_x\left[e^{-r'\tau}\left(\frac{1}{r'}-\nu_\tau\right)\right]$$

est une fonction convexe bornée décroissante.

Remarque 3.3.2 $\phi(0) = f(0) = \frac{1}{r'}$.

La fonction f étant affine et ϕ convexe, en utilisant les mêmes arguments que dans la proposition 1.2.13 du premier chapitre, le plus petit temps d'arrêt optimal est un temps d'atteinte.

Lemme 3.3.3 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (3.4) est de la forme*

$$\tau_b = \inf\{t \geq 0 \ : \ \nu_t \leq b\}.$$

Il ne reste plus qu'à trouver la forme de la fonction ϕ, le seuil optimal et d'en déduire la valeur de la dette D_0. C'est un cas simple et pour la fonction valeur ϕ les calculs directs sont plus simples que dans le premier chapitre.

Définition 3.3.4 *On introduit le processus $\bar{Z}$ défini par*

$$\bar{Z}_t = (ag - m - \frac{a\sigma^2}{2})t + a\sigma W_t, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0$$

On introduit aussi $\bar{\tau}_z$ le premier temps d'atteinte de $z < 0$ par $\bar{Z}$, ainsi que $f(.,z)$ la densité de $\bar{\tau}_z$ (qui existe d'après (5.12) page 197 de [44]).

Remarque 3.3.5 *Pour tout* $t \geq 0$, $\nu_t = \nu_0 e^{\bar{Z}_t} \mathbf{1}_{t<T_1}$ *avec* T_1 *le premier instant de saut du processus de Poisson* N. *D'après la représentation du processus* ν, *le plus petit d'arrêt optimal du problème (3.4) est de la forme* $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{\nu_0}} \wedge T_1$.

Proposition 3.3.6 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, la fonction* ϕ *est de la forme*

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x,b) = \begin{cases} \frac{1}{r'} - x & si\ x \leq b \\ \left(\frac{1}{r'+\theta} - b\right)\left(\frac{x}{b}\right)^\gamma + \frac{\theta}{r'(r'+\theta)} & si\ x > b \end{cases}$$

où $\gamma = \frac{-(ag-m-\frac{a\sigma^2}{2}) - \sqrt{(ag-m-\frac{a\sigma^2}{2})^2 + 2(r'+\theta)a^2\sigma^2}}{a^2\sigma^2} < 0$.

La démonstration de cette proposition s'appuye sur le lemme 3.2.9 qui donne la forme explicite de la transformée de Laplace d'un temps d'atteinte d'un mouvement brownien avec drift.

Preuve
Par définition, $\phi(x) = \mathbb{E}_x\left[e^{-r'\tau^*}(\frac{1}{r'} - \nu_{\tau^*})\right]$ et τ^* est de la forme $\tau_b = \inf\{t \geq 0\ :\ \nu_t \leq b\}$. Ainsi la fonction ϕ est de la forme

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x,b) = \begin{cases} \frac{1}{r'} - x & si\ x \leq b \\ \mathbb{E}_x\left[e^{-r'\tau_b}(\frac{1}{r'} - \nu_{\tau_b})\right] & si\ x > b. \end{cases}$$

D'après la remarque 3.3.5, $\tau_b = \bar{\tau}_{ln\frac{b}{\nu_0}} \wedge T_1$ où $\bar{\tau}_z$ est le temps d'arrêt introduit dans la définition 3.3.4. Pour $x > b$, on décompose selon la position de $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{\nu_0}}$ par rapport à T_1.

$$\tilde{\phi}(x,b) = \mathbb{E}_0\left[e^{-r'\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}}\left(\frac{1}{r'} - b\right)\mathbf{1}_{T_1 > \bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}}\right] + \mathbb{E}_0\left[e^{-r'T_1}\frac{1}{r'}\mathbf{1}_{T_1 \leq \bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}}\right].$$

On utilise l'indépendance de $\bar{\tau}_z$ et T_1 et le fait que $\bar{\tau}_z$ admet une densité $f(.,z)$.

$$\tilde{\phi}(x,b) = \int_0^\infty f(u, ln\frac{b}{x})\left[\left(\frac{1}{r'} - b\right)e^{-r'u}\mathbb{P}(T_1 > u) + \frac{1}{r'}\mathbb{E}\left(e^{-r'T_1}\mathbf{1}_{T_1 \leq u}\right)\right]du.$$

Or T_1 est une variable aléatoire exponentielle de paramètre θ, donc

$$\begin{aligned}\tilde{\phi}(x,b) &= \int_0^\infty f(u, ln\frac{b}{x})\left[\left(\frac{1}{r'} - b\right)e^{-(r'+\theta)u} + \frac{\theta}{r'(r'+\theta)}\left(1 - e^{-(r'+\theta)u}\right)\right]du \\ &= \frac{\theta}{r'(r'+\theta)} + \left(\frac{1}{r'+\theta} - b\right)\mathbb{E}_0\left[e^{-(r'+\theta)\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}}\right].\end{aligned}$$

On applique le lemme 3.2.9 à $\mu = \frac{ag-m-\frac{a\sigma^2}{2}}{a\sigma}$ et $y = \frac{1}{a\sigma}ln\frac{b}{x}$. Ainsi, pour $x > b$

$$\tilde{\phi}(x,b) = \frac{\theta}{r'(r'+\theta)} + \left(\frac{1}{r'+\theta} - b\right)e^{\gamma ln\frac{b}{x}}$$

avec $\gamma = \frac{-(ag-m-\frac{a\sigma^2}{2})-\sqrt{(ag-m-\frac{a\sigma^2}{2})^2+2(r'+\theta)a^2\sigma^2}}{a^2\sigma^2} < 0.$ □

Nous remarquons que la fonction $x \mapsto \tilde{\phi}(x, b)$ est continue pour toute valeur de b.

Le but du théorème suivant est de donner le b optimal et la fonction de valeur ϕ.

Théorème 3.3.7 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, il existe au moins un temps d'arrêt optimal. Le plus petit temps d'arrêt optimal du problème (3.4), noté τ^* est*

$$\tau^* = \inf\{t \geq 0 \ : \ \nu_t \leq b^*\}$$

avec

$$b^* = \frac{-\gamma}{(r'+\theta)(1-\gamma)}$$

où

$$\gamma = \frac{-(ag-m-\frac{a\sigma^2}{2}) - \sqrt{(ag-m-\frac{a\sigma^2}{2})^2 + 2(r'+\theta)a^2\sigma^2}}{a^2\sigma^2} < 0.$$

La fonction valeur ϕ est

$$\phi(x) = \begin{cases} \frac{1}{r'} - x & si\ x < b^* \\ \left(\frac{1}{r'+\theta} - b^*\right)\left(\frac{x}{b^*}\right)^\gamma + \frac{\theta}{r'(r'+\theta)} & si\ x \geq b^*. \end{cases}$$

Preuve
Le preuve est faite en deux étapes :
(1) Il faut d'abord vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $\phi(x) = \tilde{\phi}(x, b) \geq f(x)$ ce qui impose une contrainte sur b.
(2) Pour que τ_b soit optimal, il suffit de vérifier que pour tout temps d'arrêt $\eta \in \Delta$,

$$\phi(x) = \tilde{\phi}(x, b) \geq \mathbb{E}_x\left[e^{-r'\eta} f(\nu_\eta)\right].$$

Première étape

Pour $x \leq b$, $\phi(x) = f(x)$. Pour $x > b$, ϕ est une fonction convexe et f est une fonction affine ; alors $\phi(x) \geq f(x)$ dès que $\frac{\partial_d \phi}{\partial v}(b) \geq f'(b)$, soit

$$\left(\frac{1}{r'+\theta} - b^*\right)\left(\frac{\gamma}{b^*}\right) \geq -1,$$

ce qui impose sur b la contrainte $b \geq b^* = \frac{-\gamma}{(r'+\theta)(1-\gamma)}$.

Donc pour tout b tel que $b \geq b^* = \frac{-\gamma}{(r'+\theta)(1-\gamma)}$, la fonction ϕ de la proposition 3.3.6 est telle que $\phi(x) = \tilde{\phi}(x, b) \geq f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Deuxième étape

Comme le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme τ_b, il suffit de trouver la valeur de b, $b \geq b^* = \frac{-\gamma}{(r'+\theta)(1-\gamma)}$ maximisant $b \mapsto \tilde{\phi}(x,b),\ x > b$.

On dérive par rapport à b et pour $x > b$

$$\partial_b \tilde{\phi}(x,b) = \left(\frac{x}{b}\right)^{\gamma} \left[-1 - \frac{\gamma}{b}\left(\frac{1}{r'+\theta} - b\right)\right].$$

Cette dérivée est négative pour tout $b \geq b^*$, ainsi la fonction $b \mapsto \tilde{\phi}(x,b)$ est décroissante sur $[b^*,\ \infty[$ est le maximum est atteint pour $b = b^*$.

$\square$

La valeur de la dette est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 3.3.8 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, la dette est égale à*

$$D_0 = \begin{cases} \frac{1}{r'} - V_0^a & si\ V_0^a < b^* \\ \left(\frac{1}{r'+\theta} - b^*\right)\left(\frac{V_0^a}{b^*}\right)^{\gamma} + \frac{\theta}{r'(r'+\theta)} & si\ V_0^a \geq b^*, \end{cases}$$

où b^* et γ sont introduits dans le théorème 3.3.7.

Dans le cas d'une diffusion, c'est à dire si le processus V vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dV_t = gV_t dt + \sigma V_t dW_t,$$

il suffit de remplacer θ par 0 dans le théorème 3.3.7 et dans le corollaire 3.3.8 pour trouver le temps d'arrêt optimal et la valeur de la dette.

3.4. L'instant de faillite

La faillite (appelée aussi défaut) survient soit quand le processus $\bar{Z}$ introduit dans la définition 3.3.4 atteint le seuil $ln\frac{b^*}{\nu_0}$ où b^* est défini dans le théorème 3.3.7, soit au premier instant de saut du processus N puisque $\nu_{T_1} = 0 < b^*$. Ainsi l'instant de défaut est

$$\tau^* = \bar{\tau}_{ln\frac{b^*}{V_0^a}} \wedge T_1$$

avec $\bar{\tau}_{ln\frac{b^*}{V_0^a}} = inf\{t \geq 0 : (-m + ag - \frac{a\sigma^2}{2})t + a\sigma W_t \leq ln\frac{b^*}{V_0^a}\}$.

Proposition 3.4.1 *Sous les hypothèses 3.2.2 et 3.2.7, la probabilité d'apparition du défaut avant l'instant t est égale à*

$$\mathbb{P}_{V_0}(\tau^* \leq t) = 1 - e^{-\theta t}\left[\Phi\left(\frac{x_0 + \eta t}{a\sigma\sqrt{t}}\right) + e^{\frac{-2\eta x_0}{a^2\sigma^2}}\Phi\left(\frac{x_0 - \eta t}{a\sigma\sqrt{t}}\right)\right]$$

où $x_0 = ln\frac{b^*}{V_0^a}$, $\eta = ag - m - \frac{a\sigma^2}{2}$ et b^* est le seuil introduit dans le théorème 3.3.7.

Preuve
Les processus W et N sont indépendants, donc $\bar{\tau}_{ln\frac{b^*}{V_0^a}}$ et T_1 sont indépendants.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{V_0}(\tau^* \leq t) =& 1 - \mathbb{P}_{V_0}(\bar{\tau}_{ln\frac{b^*}{V_0^a}} \wedge T_1 > t) \\ =& 1 - \mathbb{P}_{V_0}(\bar{\tau}_{ln\frac{b^*}{V_0^a}} > t)\mathbb{P}_{V_0}(T_1 > t).\end{aligned}$$

On conclut avec 7.2.2 page 94 de [41] qui donne la fonction de répartition d'un temps d'atteinte d'un processus de diffusion. $\square$

4. Appendices

4.1. Résultats de contrôle optimal

Nous rappelons ici quelques résultats classiques de contrôle optimal de [47] et [81] utilisés pour résoudre les problèmes d'arrêt optimal étudiés dans cette thèse.

Théorème 4.1.1 *(Théorème 3.4 de [47])*

Soit $V_.$ un processus de Markov fort et $Y_.$ un processus de classe D s'écrivant sous la forme $t \mapsto e^{-rt}f(V_t)$ où f est une fonction mesurable. Notons J son enveloppe de Snell (c'est à dire la plus petite surmartingale qui majore Y) : $J_t = esssup_{\tau\in\Delta,\tau\geq t}E[Y_\tau \mid \mathcal{F}_t]$. Alors J_t est de la forme $J_t = e^{-rt}s(V_t)$ où la fonction s est appelée réduite d'ordre r de f.

Théorème 4.1.2 *(Critère d'optimalité – Remarque 3.5 de [47])*

Soit $Y_.$ un processus de Markov fort et J son enveloppe de Snell. Une condition nécessaire et suffisante pour qu'un temps d'arrêt τ^* soit optimal est que :

- $Y_{\tau^*} = J_{\tau^*}$,
- $J_{.\wedge\tau^*}$ *est une martingale.*

Théorème 4.1.3 *(Théorème 3.3 page 127 de [81])*

Soit $V_.$ un processus de Markov fort et $Y_.$ un processus s'écrivant sous la forme $t \mapsto f(V_t)$ où f est une fonction mesurable. Notons J son enveloppe de Snell. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on note $\tau_\varepsilon = inf\{t \geq 0 : J_t \leq Y_t + \varepsilon\}$. On suppose que Y_t satisfait les conditions suivantes : $\mathbb{P}(lim_{t\downarrow 0}Y_t = Y_0) = 1$, $\mathbb{E}[sup_{t\geq 0}max(Y_t, 0)] < \infty$, $\mathbb{E}[sup_{t\geq 0} - min(Y_t, 0)] < \infty$, alors

1. *Pour tout $\varepsilon > 0$, les τ_ε sont des temps d'arrêt ε-optimaux.*
2. *Si f est s.c.s (c'est à dire $\overline{lim}_{y\to x}f(y) \leq f(x)$), alors τ_0 est optimal.*
3. *S'il existe un temps d'arrêt optimal $\tau \in \Delta$, alors $P(\tau_0 \leq \tau) = 1$ et $\tau_0 \in \Delta$ est optimal.*

Remarque 4.1.4 *i) Sous les hypothèses du théorème 4.1.3, si la fonction f est s.c.s, alors d'après 3., τ_0 est le plus petit temps d'arrêt optimal.*
ii) Le théorème 4.1.3 est également vérifié si Y est un processus s'écrivant sous la forme $t \mapsto e^{-rt}\bar{f}(V_t)$ où $\bar{f}$ est une fonction mesurable. En effet, le processus $X_t = (V_t,\ t),\ t \geq 0$ est un processus de Markov fort et il suffit de considerer $f(X_t) = e^{-rt}\bar{f}(V_t)$.

Lemme 4.1.5 *(Lemme 3.8. page 123 de [81])*

Soit Y un processus de Markov fort. Notons J son enveloppe de Snell. Pour tout $\varepsilon \geq 0$, on note $\tau_\varepsilon = inf\{t \geq 0 : J_t \leq Y_t + \varepsilon\}$. Si le processus Y vérifie les conditions suivantes $\mathbb{P}(lim_{t\downarrow 0} Y_t = Y_0) = 1$ et $\mathbb{E}[sup_{t\geq 0} max(Y_t, 0)] < \infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$, $P(\tau_\varepsilon < \infty) = 1$.

Théorème 4.1.6 *(Remarque 3.5 page 15 de [47])*

Soit $Y_.$ un processus de Markov fort de classe D et $J_.$ son enveloppe de Snell. Si le processus $Y_.$ est semi-continu supérieurement sur les trajectoires (c'est à dire que pour tout $t \geq 0$, $Y_t \geq limsup_{s\uparrow t} Y_s$ et $Y_t \geq limsup_{s\downarrow t} Y_s$), alors le plus petit temps d'arrêt optimal est de la forme

$$\tau^* = inf\{t \geq 0 : Y_t = J_t\}.$$

Théorème 4.1.7 *(Théorème 25 page 92 de [26])*

Une surmartingale positive càd X est de classe D si et seulement si

$$lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left(X_{R_n} \mathbf{1}_{R_n < \infty}\right) = 0$$

où $R_n = inf\{t \geq 0 : X_t \geq n\}$.

4.2. Résultats utiles

Nous présentons ci-dessous un résultat utile pour le calcul de la stratégie optimale dans le cas d'un processus particulier mixte diffusion-sauts. La proposition suivante s'inspire de [49] et [21]. Dans [49] et [21], les auteurs calculent la transformée de Laplace d'un temps d'atteinte de la forme $\tau = inf\{t \geq 0 : X_t \geq b\}$ où X est un processus mixte diffusion-sauts et la variable représentant la taille des sauts suit une loi double exponentielle. Ils déterminent également la transformée de Laplace du couple $(\tau,\ X_\tau)$ et donnent l'algorithme de calcul dans le cas d'un temps d'atteinte de la forme $\tau = inf\{t \geq 0 : X_t \leq b\}$

Dans la suite $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard, $(N_t,\ t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité constante positive a, $(Y_i,\ i \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées ayant une "distribution double exponentielle", c'est-à-dire de densité

$$f_Y(y) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} 1_{y>0} + q\eta_2 e^{\eta_2 y} 1_{y<0}$$

avec $p + q = 1$, $p, q \geq 0$, $\eta_1 > 1$ et $\eta_2 > 0$.

Proposition 4.2.1 *Soit $m \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et τ un temps d'arrêt de la forme*

$$\tau = inf\{t \geq 0 : mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq b\}$$

avec $b < 0$. Alors pour $r \geq 0$:

$$E_0[e^{-r\tau}] = \frac{\psi_2(\eta_2+\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2}e^{-b\psi_3} - \frac{\psi_3(\eta_2+\psi_2)}{(\psi_2-\psi_3)\eta_2}e^{-b\psi_2}, \tag{4.1}$$

$$E_0[e^{-r\tau+X_\tau}\mathbf{1}_{\tau<\infty}] = e^b[\frac{(\eta_2+\psi_3)(\psi_2-1)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)}e^{-b\psi_3} + \frac{(\eta_2+\psi_2)(1-\psi_3)}{(\psi_2-\psi_3)(\eta_2+1)}e^{-b\psi_2}], \tag{4.2}$$

où ψ_2, ψ_3 sont les deux racines négatives de l'équation

$$m\psi + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2 + a[\frac{\eta_1 p}{\eta_1-\psi} + \frac{\eta_2 q}{\eta_2+\psi} - 1] = r$$

$-\infty < \psi_3 < -\eta_2 < \psi_2 < 0$.

Preuve
D'après le théorème 3.1 de [49], la transformée de Laplace d'un temps d'arrêt de la forme $\tau^b = inf\{t \geq 0 : mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \geq b\}$ avec $b > 0$ est :

$$E_0[e^{-r\tau^b}] = \frac{\psi_0(\eta_1-\psi_1)}{(\psi_0-\psi_1)\eta_1}e^{-b\psi_1} + \frac{\psi_1(-\eta_1+\psi_0)}{(\psi_0-\psi_1)\eta_1}e^{-b\psi_0}$$

où $0 < \psi_1 < \eta_1 < \psi_0 < \infty$ sont les solutions positives de l'équation

$$m\psi + \frac{\sigma^2}{2}\psi^2 + a[\frac{\eta_1 p}{\eta_1-\psi} + \frac{\eta_2 q}{\eta_2+\psi} - 1] = r. \tag{4.3}$$

D'après le corollaire 3.3 de [49], pour $\beta < \eta_1$, on a :

$$E_0[e^{-r\tau^b+\beta X_{\tau^b}}\mathbf{1}_{\tau^b<\infty}] = e^{\beta b}[\frac{(\eta_1-\psi_1)(\psi_0-\beta)}{(\psi_0-\psi_1)(\eta_1-\beta)}e^{-b\psi_1} + \frac{(\psi_0-\eta_1)(\psi_1-\beta)}{(\psi_0-\psi_1)(\eta_1-\beta)}e^{-b\psi_0}]. \tag{4.4}$$

Ensuite, d'après la remarque 4.2. de [49] et de [21], pour faire les mêmes calculs quand le temps d'arrêt est de la forme $\tau = inf\{t \geq 0 : mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i \leq b\}$ avec $b < 0$, il suffit de faire les changements suivants : $p \mapsto q$, $q \mapsto p$, $\psi_1 \mapsto -\psi_2$, $\psi_0 \mapsto -\psi_3$, $\eta_1 \mapsto \eta_2$, $\eta_2 \mapsto \eta_1$, $b \mapsto -b$, $\beta \mapsto -\beta$ où ψ_2 et ψ_3 sont les solutions négatives de l'équation (4.3). D'où le résultat. □

Deuxième partie .

La loi d'un temps d'atteinte. Son intensité.

La première partie de cette thèse est une mise en évidence du fait que les temps d'arrêt optimaux de faillite d'une entreprise sont parfois des temps d'atteinte. Dans ce cas les économistes s'intéressent à la loi du temps d'atteinte représentant l'instant de défaut de l'entreprise. C'est pourquoi, la deuxième partie de la thèse est consacrée au calcul de la loi d'un temps d'atteinte d'un processus de Lévy à sauts ainsi qu'à quelques exemples d'utilisation de cette loi. Une telle étude se justifie par les applications dans différents domaines, plus particulièrement dans le domaine financier.

Cette deuxième partie comprend deux chapitres.

Dans le premier chapitre, après avoir introduit les notations utilisées tout au long de cette partie (section 5.1), nous étudions la loi d'un temps d'arrêt τ de la forme $inf\{u \geq 0 : V_u \leq b\}$ où le processus V est un processus s'écrivant sous la forme $V = xe^Z$, $x > 0$ et Z est un processus de Lévy à sauts avec une composante gaussienne non-nulle. Dans la section 5.2 nous montrons un résultat utilisé par Kou et Chen dans [16] : ils utilisent la dérivée en 0 de la fonction de répartition d'un temps d'atteinte dans le cas où les variables représentant la taille de sauts suivent une loi double exponentielle, sans avoir donné une démonstration de ce calcul. De plus nous étendons ce résultat à des lois plus générales et explicitons la dérivée en tout $t \geq 0$.

Sous l'hypothèse d'existence d'un moment d'ordre exponentiel de la variable aléatoire représentant la taille des sauts, nous montrons que la fonction de répartition de τ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et nous calculons cette dérivée. Il y a des cas où $\mathbb{P}(\tau = \infty) > 0$ ce qui correspond dans le domaine financier à la situation où l'entreprise étudiée ne fait pas forcément faillite. Nos résultats s'appuient en particulier sur les outils démontrés dans la section 5.3.

Dans le deuxième chapitre, en suivant [42], nous donnons quelques applications d'utilisation de la loi du temps d'arrêt introduit dans le premier chapitre, plus précisément lors du calcul de la fonction intensité et du processus intensité. Nous commençons ce chapitre avec quelques définitions et résultats généraux de [42] sur la notion de fonction intensité d'un temps d'arrêt quelconque (section 6.1.1) et ensuite nous la calculons dans le cas particulier où V est le processus introduit dans la section 5.1 et $\tau = inf\{u \geq 0 : V_u \leq b\}$ (section 6.1.2). Nous introduisons ensuite la notion de processus intensité associé à une certaine filtration $\mathcal{F}$ et nous rappelons quelques résultats de [42] et [25] (section 6.2). Deux cas sont présentés : quand le temps d'arrêt est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt (section 6.2.1) et quand il ne l'est pas (section 6.2.2). Chaque partie est illustrée avec le calcul du processus intensité du temps d'atteinte τ introduit dans section 5.1. Plus précisément, nous montrons qu'il n'existe pas de processus intensité associé à la filtration engendrée par le processus V et nous calculons le processus intensité associé à la filtration engendrée par un processus continu qui est l'observation bruitée du signal V.

5. La loi du temps d'atteinte dans le cas d'un processus mixte diffusion-sauts

Dans ce chapitre nous montrons que la loi d'un temps d'atteinte d'un processus mixte diffusion-sauts admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue.

5.1. Hypothèses et notations

On se place sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ sur lequel on considère V un processus stochastique s'écrivant sous la forme

$$V = xe^Z \quad \text{où} \quad Z_t = mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0, \tag{5.1}$$

$x > 0$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard, $(N_t,\ t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité constante positive a, $(Y_i,\ i \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de fonction de répartition F_Y vérifiant l'hypothèse suivante :

Hypothèse 5.1.1 *Il existe $\beta > 0$ tel que $\mathbb{E}(e^{\beta|Y_1|}) < \infty$.*

Remarque 5.1.2 *Sous l'hypothèse 5.1.1, on a $\mathbb{E}(Y_1^2) < \infty$. En effet*

$$\mathbb{E}(e^{\beta|Y_1|}) = \mathbb{E}\left(\sum_{i\geq 0} \frac{\beta^i |Y_1|^i}{i!}\right) \geq \frac{\beta^2 \mathbb{E}(Y_1^2)}{2}, \quad d'où \quad \mathbb{E}(Y_1^2) \leq \frac{2}{\beta^2}\mathbb{E}(e^{\beta|Y_1|}) < \infty.$$

On suppose de plus que $(Y_i,\ i \in \mathbb{N})$, $(N_t,\ t \geq 0)$ et $(W_t,\ t \geq 0)$ sont indépendants.

Soit $(T_n,\ n \in \mathbb{N})$ la suite des instants de sauts du processus N. Il existe $(S_i,\ i \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre a telle que $T_n = S_1 + ... + S_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère τ le temps d'arrêt défini par $\tau = inf\{u \geq 0 : V_u \leq b\}$ avec $b \in]0,\ x[$.

Définition 5.1.3 *On introduit le processus $\bar{Z}$ défini par*

$$\bar{Z}_t = mt + \sigma W_t, \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0$$

avec $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$. On introduit aussi $\bar{\tau}_z$ le premier temps d'atteinte de z par $\bar{Z}$, ainsi que $f(.,z)$ la dérivée de la fonction de répartition de $\bar{\tau}_z$ (voir (5.4) de la section 5.3). Soulignons le fait que $\mathbb{P}(\bar{\tau}_z = \infty) = 1 - e^{\frac{mz-|mz|}{\sigma^2}}$.

5.2. Etude de la loi de τ

Le but de cette section est de montrer que la fonction de répartition du temps d'arrêt τ est dérivable en tout $t \geq 0$. Si τ est presque sûrement fini, cette dérivée est la densité de τ.

Proposition 5.2.1 *Sous l'hypothèse 5.1.1, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_x(\tau \leq t)$ est dérivable en 0 à droite de dérivée égale à*

$$f_\tau(0,x) = aF_Y\left(ln\frac{b}{x}\right) + \frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\left[F_Y\left(ln\frac{b}{x}\right) - F_Y\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^-\right)\right]$$

où B est la fonction Béta.

Preuve On décompose $\mathbb{P}_x(\tau \leq h)$ selon la valeur de N_h :

$$\mathbb{P}_x(\tau \leq h) = \mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h = 0) + \mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h = 1) + \mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h \geq 2).$$

Or $\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h \geq 2) \leq \mathbb{P}_x(N_h \geq 2) = 1 - e^{-ah} - ahe^{-ah}$, donc

$$lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h \geq 2)}{h} = 0.$$

La preuve sera complète lorsque les deux lemmes suivants seront démontrés :

Lemme 5.2.2 *Le terme $\frac{\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h = 0)}{h}$ converge vers 0 quand h tend vers 0.*

Lemme 5.2.3 *Sous l'hypothèse 5.1.1, pour tout $b < x$ le terme $\frac{\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h = 1)}{h}$ converge vers*

$$aF_Y\left(ln\frac{b}{x}\right) + \frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\mathbb{P}\left(Y_1 = ln\frac{b}{x}\right)$$

quand h tend vers 0.

Preuve du lemme 5.2.2.
On remarque que sur l'ensemble aléatoire $\{\omega : N_h(\omega) = 0\} \times [0, h]$, $V = xe^{\bar{Z}}$ où $\bar{Z}$ est le processus introduit dans la définition 5.1.3. Alors $\tau = inf\{u \geq 0 : V_u \leq b\} = \bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$ et $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$ est indépendant de N, d'où

$$\frac{\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h = 0)}{h} = \frac{e^{-ah}\mathbb{P}_0(\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} \leq h)}{h}.$$

Or comme il est rappelé dans la section 5.3, la fonction de répartition du temps d'arrêt $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$ admet une dérivée $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle en 0, notée f. Donc la limite de $\frac{\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h=0)}{h}$ existe et vaut 0 quand h tend vers 0. □

Preuve du lemme 5.2.3.
On décompose $\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h = 1)$ selon la position relative de τ et T_1 (le premier instant de saut du processus N) :

$$\mathbb{P}_x(\tau \leq h, N_h = 1) = \mathbb{P}_x(\tau < T_1, N_h = 1) + \mathbb{P}_x(\tau = T_1, N_h = 1) + \mathbb{P}_x(T_1 < \tau \leq h, N_h = 1). \tag{5.2}$$

On étudie le premier terme du membre droite de (5.2). Sur l'ensemble aléatoire $\{(\omega, t) : t \leq \tau(\omega) < T_1(\omega)\}$, $V = xe^{\bar{Z}}$ où $\bar{Z}$ est le processus défini dans la définition 5.1.3 et $\tau = \bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$; d'où :

$$\mathbb{P}_x(\tau < T_1, N_h = 1) = \mathbb{P}_x(\tau \leq h, \tau < T_1, N_h = 1) \leq \mathbb{P}_0(\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} \leq h).$$

La fonction de répartition du temps d'arrêt $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$ admet une dérivée $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, nulle en 0. Donc $\frac{\mathbb{P}_x(\tau < T_1, N_h=1)}{h}$ converge vers 0 quand h tend vers 0.

Le deuxième terme du membre droite de (5.2) s'écrit

$$\mathbb{P}_x(\tau = T_1, N_h = 1) = \mathbb{P}_0(\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > T_1,\ \bar{Z}_{T_1} + Y_1 \leq ln\frac{b}{x},\ T_1 \leq h < T_2).$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $T_n = S_1 + ... + S_n$ où $(S_i,\ i \geq 1)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre a :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(\tau = T_1, N_h = 1) = &\int_0^h ae^{-as_1}\int_{h-s_1}^{\infty} ae^{-as_2}\mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > s_1}\mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_{s_1}})ds_2 ds_1\\ =&ae^{-ah}\int_0^h \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > s_1}\mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_{s_1}}]ds_1.\end{aligned}$$

Le terme $\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > s_1}\mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_{s_1}}$ est positif, majoré par 1 et converge presque sûrement vers $\mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x}}$ quand s_1 tend vers 0. D'après le théorème de convergence dominée

$lim_{s_1\to 0}\mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}>s_1}\mathbf{1}_{Y_1\leq ln\frac{b}{x}-\bar{Z}_{s_1}}) = \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{Y_1\leq ln\frac{b}{x}}) = F_Y(ln\frac{b}{x})$, donc la fonction $h\mapsto \mathbb{P}_x(\tau = T_1, N_h = 1)$ est dérivable en 0 de dérivée $aF_Y(ln\frac{b}{x})$, soit

$$lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(\tau = T_1, N_h = 1)}{h} = aF_Y(ln\frac{b}{x}).$$

Le troisième terme du membre droite de (5.2) s'écrit

$$\mathbb{P}_x(T_1 < \tau \leq h, N_h = 1) = \mathbb{P}_x(T_1 < \tau \leq h, T_1 \leq h < T_2).$$

Sur l'événement $\{\omega : \tau(\omega) > T_1(\omega)\}$, $\tau = T_1 + \tau\circ\theta_{T_1}$ et $T_2 = T_1 + T_1\circ\theta_{T_1}$ où θ est l'opérateur translation. De plus, sur l'événement $\{\omega : T_1(\omega) \leq h < T_2(\omega)\}$, $V_s = V_{T_1}\exp(\bar{Z}_{s-T_1})\circ\theta_{T_1}$ lorsque $T_1 < s < h$ donc $\tau = T_1 + \bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_1}}}\circ\theta_{T_1}$ sur l'événement $\{\omega : \tau(\omega) > T_1(\omega)\}$.

En utilisant la propriété de Markov forte en T_1 on obtient :

$$\mathbb{P}_x(T_1 < \tau \leq h, N_h = 1) = \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_1}\mathbf{1}_{h\geq T_1}\mathbb{E}_0^{T_1}(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_1}}}\leq h-T_1}\mathbf{1}_{h-T_1<\bar{T}_1})\right)$$

où $\mathbb{E}_0^{T_1}(.) = \mathbb{E}(.\mid\mathcal{F}_{T_1})$ et $\bar{T}_1$ est une variable aléatoire indépendante de T_1 et de $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_1}}}$, de même loi que T_1 et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle complétée engendrée par les processus $(W_t,\ t\geq 0)$, $(N_t,\ t\geq 0)$ et les variables aléatoires $(Y_i,\ i\in\mathbb{N}^*)$. En intégrant par rapport à $\bar{T}_1$ on a :

$$\mathbb{P}_x(T_1 < \tau \leq h, N_h = 1) = \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_1}\mathbf{1}_{h\geq T_1}e^{-a(h-T_1)}\mathbb{E}_0^{T_1}(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_1}}}\leq h-T_1})\right).$$

On conclut avec la proposition 5.3.4 de la section 5.3 que

$$lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(T_1 < \tau \leq h, N_h = 1)}{h} = \frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\mathbb{P}\left(Y_1 = ln\frac{b}{x}\right).$$

□

En utilisant les lemmes 5.2.2 et 5.2.3, la limite $lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(\tau\leq h)}{h}$ existe et est égale à $lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(\tau\leq h, N_h=0)}{h} + lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(\tau\leq h, N_h=1)}{h} = aF_Y(ln\frac{b}{x}) + \frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\mathbb{P}\left(Y_1 = ln\frac{b}{x}\right)$; la fonction $t\mapsto\mathbb{P}_x(\tau\leq t)$ est dérivable en 0 à droite de dérivée $aF_Y(ln\frac{b}{x}) + \frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\mathbb{P}\left(Y_1 = ln\frac{b}{x}\right)$. □

Remarque 5.2.4 *Si les variables aléatoires $\{Y_i,\ i\in\mathbb{N}^*\}$ admettent une densité, alors $F_Y\left(ln\frac{b}{x}\right) = F_Y\left(\left(ln\frac{b}{x}\right)^-\right)$ et la fonction $t\mapsto\mathbb{P}_x(\tau\leq t)$ est dérivable en 0 à droite de dérivée égale à $aF_Y\left(ln\frac{b}{x}\right)$.*

Théorème 5.2.5 *Sous l'hypothèse 5.1.1, la fonction* $t \mapsto \mathbb{P}_x(\tau \leq t)$ *est dérivable en tout* $t > 0$ *et la dérivée notée* $f_\tau(t,x)$ *vaut*

$$f_\tau(t,x) = \frac{\partial \mathbb{P}_x(\tau \leq t)}{\partial t} = a\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right) + \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_{N_t}}f(t-T_{N_t}, ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}})\right),$$

où la fonction f *est introduite dans (5.4).*

Preuve
On décompose $\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h)$ selon les valeurs de $N_{t+h} - N_t$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h) =& \mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t = 0) + \mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t = 1)\\ &+ \mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t \geq 2). \end{aligned} \tag{5.3}$$

Le troisième terme du membre droite de (5.3) est majoré par

$$\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t \geq 2) \leq \mathbb{P}_x(N_{t+h} - N_t \geq 2) = 1 - e^{-ah} - ahe^{-ah}$$

donc $lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t\geq 2)}{h} = 0$.

Le théorème sera démontré lorsque on aura prouvé le lemme et la proposition suivante :

Lemme 5.2.6 *Sous l'hypothèse 5.1.1, le terme* $\frac{\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t=1)}{h}$ *tend vers* $a\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right)$ *quand* h *tend vers 0.*

Proposition 5.2.7 *Sous l'hypothèse 5.1.1, le terme* $\frac{\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t=0)}{h}$ *tend vers* $\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_{N_t}}f(t-T_{N_t}, ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}})\right)$ *quand* h *tend vers 0, où la fonction* f *est introduite dans (5.4).*

Preuve du lemme 5.2.6
On utilise la propriété de Markov en t :

$$\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t = 1) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\tau>t}\mathbb{P}_{V_t}(\tau \leq h,\ N_h = 1)).$$

D'après le lemme 5.2.3, $\frac{\mathbb{P}_{V_t}(\tau\leq h,\ N_h=1)}{h}$ converge vers

$$aF_Y\left(ln\frac{b}{V_t}\right) + \frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\left[F_Y\left(ln\frac{b}{V_t}\right) - F_Y\left(\left(ln\frac{b}{V_t}\right)^-\right)\right]$$

et est majoré par $\frac{\mathbb{P}_{V_t}(N_h=1)}{h} = ae^{-ah} \leq a$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t=1)}{h}=a\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right)+\frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}\Delta F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right)$$

où $\Delta F_Y(z)=F_Y(z)-F_Y(z^-)$.
Mais l'ensemble des sauts de F_Y, la fonction de répartition de Y, est au plus dénombrable et V admet une densité conformément à la proposition 3.12 page 90 de [19]. Donc $\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}\Delta F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right)=0$ $\left(\text{en effet } 0\leq\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}\Delta F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right)\leq\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Y=ln\frac{b}{V_t}})=\mathbb{E}(\mathbf{1}_{V_t=be^{-Y}})=0\right)$ et

$$lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t=1)}{h}=a\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right).$$

□

Preuve de la proposition 5.2.7
On utilise la propriété de Markov en l'instant T_{N_t}.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t=0)=&\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ T_{N_t}\leq t<t+h<T_{N_t+1})\\=&\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_{N_t}}\mathbb{E}_{V_{T_{N_t}}}(\mathbf{1}_{t-T_{N_t}<\tau\leq t+h-T_{N_t}}\mathbf{1}_{t+h-T_{N_t}<T_1})\right).\end{aligned}$$

Sur l'événement $\{(\omega,t):t\leq\tau(\omega)<T_1(\omega)\}$, $V=xe^{\bar{Z}}$ et $\tau=\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$ où $\bar{Z}$ et $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$ sont le processus et le temps d'arrêt introduits dans la définition 5.1.3 ; d'où

$$\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t=0)=\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_{N_t}}\mathbb{E}_0^{T_{N_t}}(\mathbf{1}_{t-T_{N_t}<\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}}\leq t+h-T_{N_t}}\mathbf{1}_{t+h-T_{N_t}<T_1})\right).$$

Puis en utilisant l'indépendance de T_1 et de W (donc de T_1 et de $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}}$), on obtient

$$\mathbb{P}_x(t<\tau\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t=0)=\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_{N_t}}e^{-a(t+h-T_{N_t})}\mathbb{E}_0^{T_{N_t}}(\mathbf{1}_{t-T_{N_t}<\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}}\leq t+h-T_{N_t}})\right).$$

La fonction de répartition du temps d'arrêt $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}}$ admet une dérivée $\mathcal{C}^\infty$, notée f, définie en 5.1.3 ; ainsi

$$lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\mathbb{E}_0^{T_{N_t}}(\mathbf{1}_{t-T_{N_t}<\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}}\leq t+h-T_{N_t}})=lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_{t-T_{N_t}}^{t+h-T_{N_t}}f(u,ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}})du=f(t-T_{N_t},ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}).$$

Pour conclure avec le théorème de convergence dominée il suffit de majorer uniformément en h le terme $\mathbf{1}_{\tau>T_{N_t}}\frac{1}{h}\mathbb{E}_0^{T_{N_t}}(\mathbf{1}_{t-T_{N_t}<\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}}\leq t+h-T_{N_t}})$.

On introduit $0<\varepsilon<\frac{1}{4}$ et $M\geq 1$ tel que $|\frac{2m}{M\sigma^2}|\leq\beta$ (où β est défini dans l'hypothèse 5.1.1) et $\frac{1}{\varepsilon}<M\left(1\wedge\frac{\beta\sigma^2}{2|m|}\right)$ (cette dernière contrainte entre M et ε servira plus tard

pour pouvoir appliquer les propositions 5.3.6 et 5.3.7 de la section 5.3). En utilisant la majoration du lemme 5.3.2 de la section 5.3, il existe $c_{\varepsilon,M,\sigma} > 0$ tel que

$$f(u, ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}) \leq c_{\varepsilon,M,\sigma} u^{-1+\varepsilon} \frac{\exp[\frac{m}{M\sigma^2} ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}]}{|ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}|^{2\varepsilon}}, \quad u \in]0, \infty[$$

et par suite

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} \frac{1}{h} \mathbb{E}_{V_{T_{N_t}}}(\mathbf{1}_{t - T_{N_t} < \bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}} \leq t+h-T_{N_t}}) \leq & c_{\varepsilon,M,\sigma} \mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} \frac{\exp[\frac{m}{M\sigma^2} ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}]}{|ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}|^{2\varepsilon}} \frac{1}{h} \int_{t-T_{N_t}}^{h+t-T_{N_t}} u^{-1+\varepsilon} du \\ \leq & c_{\varepsilon,M,\sigma} \mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} (t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} \frac{\exp[\frac{m}{M\sigma^2} ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}]}{|ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}|^{2\varepsilon}} \end{aligned}$$

puisque $u^{-1+\varepsilon} \leq (t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}$ sur l'intervalle d'intégration. Ensuite on applique l'inégalité $x_1 x_2 \leq \frac{x_1^2 + x_2^2}{2}$ à $x_1 = \exp[\frac{m}{M\sigma^2} ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}]$ et $x_2 = |ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}|^{-2\varepsilon}$ et en utilisant $ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}} = ln\frac{b}{x} - Z_{T_{N_t}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} (t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} \frac{\exp[\frac{m}{M\sigma^2} ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}]}{|ln\frac{b}{V_{T_i}}|^{2\varepsilon}} \leq & \frac{1}{2} (t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} \exp[\frac{2m}{M\sigma^2} (ln\frac{b}{x} - Z_{T_{N_t}})] \\ & + \frac{1}{2} (t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} |ln\frac{b}{x} - Z_{T_{N_t}}|^{-4\varepsilon}. \end{aligned}$$

D'après les propositions 5.3.6 et 5.3.7 de la section 5.3, ces deux dernières variables aléatoires sont intégrables. Donc on peut passer à la limite sous l'espérance et

$$lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h, \ N_{t+h} - N_t = 1)}{h} = \mathbb{E}_x \left(\mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} f(t - T_{N_t}, ln\frac{b}{V_{N_t}}) \right).$$

□

En utilisant le lemme 5.2.6 et la proposition 5.2.7, la limite $lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}_x(t < \tau \leq t+h)}{h}$ existe et est égale à $a\mathbb{E}_x \left(\mathbf{1}_{\tau > t} F_Y(ln\frac{b}{V_t}) \right) + \mathbb{E}_x \left(\mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} f(t - T_{N_t}, ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}}) \right)$ ce qui conclut la preuve du théorème 5.2.5. □

Corollaire 5.2.8 *Les deux assertions suivantes sont vraies :*
(1) $\mathbb{P}_x(\tau \leq t) = \int_0^t f_\tau(u, x) du$ *pour tout* $t \geq 0$.
(2) Si de plus τ *est presque sûrement fini,* $\int_0^\infty f_\tau(u, x) du = 1$ *et* $f_\tau(., x)$ *est la densité du temps d'arrêt* τ.

Preuve
La première partie du corollaire est une conséquence du théorème 5.2.5 et le deuxième point est une conséquence de (1). □

5.3. Appendice

Le mouvement brownien avec drift est le processus

$$\bar{Z}_t = mt + \sigma W_t, \quad t \geq 0$$

avec $\sigma > 0$ et $m \in \mathbb{R}$.

Soit $z < 0$ et $\bar{\tau}_z$ le temps d'arrêt défini par

$$\bar{\tau}_z = inf\{t \geq 0 : \bar{Z}_t \leq z\}.$$

D'après (5.12) page 197 de [44], $\bar{\tau}_z$ a pour loi sur $\overline{\mathbb{R}}_+$:

$$f(u, z)du + \mathbb{P}(\bar{\tau}_z = \infty)\delta_\infty(du)$$

où

$$f(u, z) = \frac{\mid z \mid}{\sigma\sqrt{2\pi u^3}} \exp[-\frac{1}{2u}(\frac{z}{\sigma} - \frac{mu}{\sigma})^2]\mathbf{1}_{]0,\infty[}(u), \quad u \in \mathbb{R}, \tag{5.4}$$

et $\mathbb{P}(\bar{\tau}_z = \infty) = 1 - e^{\frac{mz-|mz|}{\sigma^2}}$.

A z fixé, la fonction $f(., z)$ et toutes ses dérivées admettent 0 pour limite en 0^+. La fonction f admet un prolongement $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, noté f, défini par $f(u, z) = 0$ pour $u \leq 0$. De plus elle vérifie les deux lemmes suivants :

Lemme 5.3.1 *Soit G une variable gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$ et c, $d \in \mathbb{R}$. Alors pour tout $u \in \mathbb{R}$*

$$\mathbb{E}[f(u, c + dG)\mathbf{1}_{c+dG<0}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{E}\left[e^{-\frac{(c-mu)^2}{2(d^2+\sigma^2 u)}}\left(\frac{-c\sigma^2 - d^2 m}{(d^2 + \sigma^2 u)^{3/2}} - \frac{d\sigma G}{\sqrt{u}(d^2 + \sigma^2 u)}\right)_+\right]$$

où $(x)_+ = max(x, 0)$.

Preuve
En utilisant la densité de G et l'expression de f on a :

$$\mathbb{E}[f(u, c + dG)\mathbf{1}_{c+dG<0}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi u^3}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|c + dg|e^{-\frac{(c+dg-mu)^2}{2\sigma^2 u}} e^{-\frac{g^2}{2}}\mathbf{1}_{c+dg<0}dg.$$

Comme $|c + dg|\mathbf{1}_{c+dg<0} = (-c - dg)\mathbf{1}_{-c-dg>0} = (-c - dg)_+$, on peut écrire

$$\mathbb{E}[f(u, c + dG)\mathbf{1}_{c+dG<0}] = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi u^3}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-c - dg)_+ e^{-\frac{(c+dg-mu)^2}{2\sigma^2 u}} e^{-\frac{g^2}{2}} dg.$$

On développe le carré

$$\begin{aligned}\frac{(c+dg-mu)^2}{\sigma^2 u}+g^2 =& g^2(\frac{d^2}{\sigma^2 u}+1)+\frac{2dg(c-mu)}{\sigma^2 u}+\frac{(c-mu)^2}{\sigma^2 u}\\ =&\frac{d^2+\sigma^2 u}{\sigma^2 u}\left(g+\frac{d(c-mu)}{d^2+\sigma^2 u}\right)^2+\frac{(c-mu)^2}{d^2+\sigma^2 u},\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}[f(u,c+dG)\mathbf{1}_{c+dG<0}]=\frac{e^{-\frac{(c-mu)^2}{2(d^2+\sigma^2 u)}}}{\sigma\sqrt{2\pi u^3}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-c-dg)_+ e^{-\frac{d^2+\sigma^2 u}{2\sigma^2 u}(g+\frac{d(c-mu)}{d^2+\sigma^2 u})^2}dg.$$

On fait le changement de variable $x=\sqrt{\frac{d^2+\sigma^2 u}{\sigma^2 u}}(g+\frac{d(c-mu)}{d^2+\sigma^2 u})$, et

$$\mathbb{E}[f(u,c+dG)\mathbf{1}_{c+dG<0}]=\frac{e^{-\frac{(c-mu)^2}{2(d^2+\sigma^2 u)}}}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{-c\sigma^2-d^2 m}{(d^2+\sigma^2 u)^{3/2}}-\frac{d\sigma x}{\sqrt{u}(d^2+\sigma^2 u)}\right)_+ e^{-\frac{x^2}{2}}dx$$

d'où le résultat. □

Lemme 5.3.2 *Soit la fonction $f:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ définie par*

$$f(u,z)=\begin{cases}\frac{|z|}{\sigma\sqrt{2\pi u^3}}\exp[-\frac{1}{2u}(\frac{z}{\sigma}-\frac{mu}{\sigma})^2] & si\ u>0\\ 0 & si\ u\le 0\end{cases}$$

avec $\sigma>0$ et $m\in\mathbb{R}$. Alors pour tout $\varepsilon>0$ et $M\ge 1$, il existe $c_{\varepsilon,M,\sigma}>0$ tel que

$$f(u,z)\le c_{\varepsilon,M,\sigma}u^{-1+\varepsilon}\frac{1}{|\ z\ |^{2\varepsilon}}\exp[\frac{mz}{M\sigma^2}].$$

Preuve
Soit $\varepsilon>0$ et $M\ge 1$ fixés ; on cherche à majorer le quotient $\frac{f(u,z)}{u^{-1+\varepsilon}\frac{1}{|z|^{2\varepsilon}}\exp[\frac{mz}{M\sigma^2}]}$, $z<0$, $u\in\mathbb{R}_+$. On a la majoration $\exp[-\frac{1}{2u}(\frac{z}{\sigma}-\frac{mu}{\sigma})^2]\le\exp[-\frac{1}{2uM}(\frac{z}{\sigma}-\frac{mu}{\sigma})^2]$. Donc

$$\begin{aligned}\frac{f(u,z)}{u^{-1+\varepsilon}\frac{1}{|z|^{2\varepsilon}}\exp[\frac{mz}{M\sigma^2}]}\le&\frac{\frac{|z|}{\sigma\sqrt{2\pi u^3}}\exp[-\frac{1}{2uM}(\frac{z}{\sigma}-\frac{mu}{\sigma})^2]}{u^{-1+\varepsilon}\frac{1}{|z|^{2\varepsilon}}\exp[\frac{mz}{M\sigma^2}]}\\ =&\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\left(\frac{z^2}{u}\right)^{\frac12+\varepsilon}\exp[-\frac{z^2}{2\sigma^2 uM}]\exp[-\frac{m^2 u}{2M\sigma^2}]\\ \le&\frac{\sigma^\varepsilon M^{\frac12+\varepsilon}2^\varepsilon}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{z^2}{2\sigma^2 uM}\right)^{\frac12+\varepsilon}\exp[-\frac{z^2}{2\sigma^2 uM}].\end{aligned}$$

La fonction $x\mapsto x^{\frac12+\varepsilon}e^{-x}$ est continue, nulle en 0 et en $+\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}^+$: il existe $c_\varepsilon>0$ tel que $x^{\frac12+\varepsilon}e^{-x}\le c_\varepsilon$ pour tout $x\in\mathbb{R}_+$. On applique cette inégalité à $x=\frac{z^2}{2\sigma^2 uM}$, ainsi $(\frac{z^2}{2\sigma^2 uM})^{\frac12+\varepsilon}\exp[-\frac{z^2}{2\sigma^2 uM}]\le c_\varepsilon$, d'où le résultat. □

Lemme 5.3.3 *Soit G une variable gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$, $d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$, alors*

$$\mathbb{E}(|d+cG|^{-\alpha}) \le \frac{1}{c(1-\alpha)}\mathbb{E}(|G||d+cG|^{1-\alpha}).$$

Preuve

Soit G une variable $\mathcal{N}(0,1)$, $d \in \mathbb{R}$, $c > 0$ et $0 < \alpha < 1$. Alors en utilisant la forme de la densité de G :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|d+cG|^{-\alpha}) &= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}|d+cx|^{-\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &= \int_{-\frac{d}{c}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(d+cx)^{-\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}dx + \int_{-\infty}^{-\frac{d}{c}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-d-cx)^{-\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}dx.\end{aligned}$$

Pour chaque intégrale, on fait une intégration par parties :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(|d+cG|^{-\alpha}) = &\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{(d+cx)^{1-\alpha}}{c(1-\alpha)}\right]_{-\frac{d}{c}}^{\infty} + \frac{1}{c(1-\alpha)}\int_{-\frac{d}{c}}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(d+cx)^{1-\alpha}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ &+ \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\frac{(-d-cx)^{1-\alpha}}{-c(1-\alpha)}\right]_{-\infty}^{-\frac{d}{c}} - \frac{1}{c(1-\alpha)}\int_{-\infty}^{-\frac{d}{c}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}(-d-cx)^{1-\alpha}xe^{-\frac{x^2}{2}}dx \\ =&\frac{1}{c(1-\alpha)}\int_{\mathbb{R}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}|d+cx|^{1-\alpha}e^{-\frac{x^2}{2}}\left(x\mathbf{1}_{x>-\frac{d}{c}} - x\mathbf{1}_{x\le-\frac{d}{c}}\right)dx \\ =&\frac{1}{c(1-\alpha)}\mathbb{E}\left[|d+cG|^{1-\alpha}G(\mathbf{1}_{G>-\frac{d}{c}} - \mathbf{1}_{G\le-\frac{d}{c}})\right].\end{aligned}$$

Or pour tout $d \in \mathbb{R}$ et $c > 0$,

$$G(\mathbf{1}_{G>-\frac{d}{c}} - \mathbf{1}_{G\le-\frac{d}{c}}) = G - 2G\mathbf{1}_{G\le-\frac{d}{c}} \le G - 2G\mathbf{1}_{G\le 0} = |G|,$$

d'où

$$\mathbb{E}(|d+cG|^{-\alpha}) \le \frac{1}{c(1-\alpha)}\mathbb{E}(|G||d+cG|^{1-\alpha}).$$

□

Proposition 5.3.4 *Soit*

$$A(h) = \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>T_1}\mathbf{1}_{h\ge T_1}e^{-a(h-T_1)}\mathbb{E}_0^{T_1}(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_1}}}\le h-T_1})\right) \quad et$$

$$G(h) = \mathbb{E}_0\left(\mathbf{1}_{h\ge T_1}\mathbf{1}_{\bar{Z}_{T_1}+Y_1>ln\frac{b}{x}}e^{-a(h-T_1)}\mathbb{E}_0^{T_1}(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{V_{T_1}}}\le h-T_1})\right).$$

(1) Alors $lim_{h\to 0}\frac{A(h)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{G(h)}{h}$ dès que l'une des deux limites existe.
(2) Sous l'hypothèse 5.1.1 $\left(e^{\beta|Y_1|} \in L^1(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})\right)$, les limites $lim_{h\to 0}\frac{G(h)}{h}$ et $lim_{h\to 0}\frac{A(h)}{h}$ existent et valent $\frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\mathbb{P}\left(Y_1 = ln\frac{b}{x}\right)$.

Preuve
(1) On se propose de calculer $lim_{h\to 0}\frac{G(h)-A(h)}{h}$. On remarque que

$$\{\omega : \tau(\omega) > T_1(\omega)\} = \{\omega : \bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}(\omega) > T_1(\omega)\} \cap \{\omega : \bar{Z}_{T_1(\omega)} + Y_1 > ln\frac{b}{x}\}.$$

Ainsi $\mathbf{1}_{\bar{Z}_{T_1}+Y_1>ln\frac{b}{x}} - \mathbf{1}_{\tau>T_1} = \mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}\le T_1}\mathbf{1}_{\bar{Z}_{T_1}+Y_1>ln\frac{b}{x}} \le \mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}\le T_1}$. D'où

$$G(h) - A(h) \le \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}\le T_1\le h}) \le \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}\le h})$$

et $0 \le \frac{G(h)-A(h)}{h} \le \frac{\mathbb{P}_0(\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}\le h)}{h}$. Comme la fonction de répartition de $\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}}$ admet une dérivée nulle en 0, alors la limite $lim_{h\to 0}\frac{G(h)-A(h)}{h}$ existe, elle est nulle et $lim_{h\to 0}\frac{A(h)}{h} = lim_{h\to 0}\frac{G(h)}{h}$ dès que l'une des deux limites existe.
(2) On montre sous l'hypothèse 5.1.1, que la limite $lim_{h\to 0}\frac{G(h)}{h}$ existe et vaut $\frac{aB\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)}{2\pi}\mathbb{P}\left(Y_1 = ln\frac{b}{x}\right)$.
On intégre par rapport à T_1 puis on utilise le fait que la fonction de répartition de $\bar{\tau}_z$ admet pour dérivée $f(.,z)$:

$$\begin{aligned}
G(h) =& \int_0^h ae^{-as}\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{\bar{Z}_s+Y_1>ln\frac{b}{x}}e^{-a(h-s)}\mathbb{E}_0^s(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}-\bar{Z}_s-Y_1}\le h-s})\right]ds\\
=&ae^{-ah}\int_0^h \mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{\bar{Z}_s+Y_1>ln\frac{b}{x}}\mathbb{E}_0^s(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}-\bar{Z}_s-Y_1}\le h-s})\right]ds\\
=&ae^{-ah}\int_0^h \mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{\bar{Z}_s+Y_1>ln\frac{b}{x}}\int_0^{h-s} f(u, ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_s - Y_1)du\right]ds.
\end{aligned}$$

Tous les termes sont positifs ; on peut donc intervertir l'intégrale de Lebesgue en du et l'espérance. Puisque $\bar{Z}_s = ms + \sigma W_s$, on applique le lemme 5.3.1 à $c = ln\frac{b}{x} - ms - Y_1$, $d = -\sigma\sqrt{s}$ et $G = \frac{W_s}{\sqrt{s}}$.

$$\begin{aligned}
G(h) =&ae^{-ah}\int_0^h\int_0^{h-s}\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{-ms-\sigma W_s-Y_1+ln\frac{b}{x}<0}f(u, ln\frac{b}{x} - ms - \sigma W_s - Y_1)\right]duds\\
=&\frac{ae^{-ah}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^h\int_0^{h-s}\mathbb{E}_0\left[e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-m(u+s)-Y_1)^2}{2\sigma^2(u+s)}}\left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma(u+s)^{3/2}} + \frac{W_s}{\sqrt{u}(u+s)}\right)_+\right]duds.
\end{aligned}$$

Ensuite on note que $|W_s| =^{Loi} \sqrt{s}|G|$ où G est une variable aléatoire gaussienne $\mathcal{N}(0,1)$ indépendante de Y_1.
$G(h) = \frac{ae^{-ah}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^h\int_0^{h-s}\mathbb{E}_0\left[e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-m(u+s)-Y_1)^2}{2\sigma^2(u+s)}}\left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma(u+s)^{3/2}} + \frac{G\sqrt{s}}{\sqrt{u}(u+s)}\right)_+\right]duds.$
On pose $r = u + s$.
$G(h) = \frac{ae^{-ah}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^h\int_s^h\mathbb{E}_0\left[e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}}\left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma r^{3/2}} + \frac{G\sqrt{s}}{r\sqrt{r-s}}\right)_+\right]drds.$

On applique le théorème de Fubini et ensuite on fait le changement de variable $v = \frac{s}{r}$.

$$G(h) = \frac{ae^{-ah}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^h \int_0^r \mathbb{E}_0 \left[e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma r^{3/2}} + \frac{G\sqrt{s}}{r\sqrt{r-s}} \right)_+ \right] dsdr$$
$$= \frac{ae^{-ah}}{\sqrt{2\pi}} \int_0^h \int_0^1 \mathbb{E}_0 \left[e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma \sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+ \right] dvdr.$$

Or $e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+$ tend vers $\mathbf{1}_{Y_1 = ln\frac{b}{x}} \sqrt{\frac{v}{1-v}} G_+$ quand r tend vers 0. Pour conclure on montre que $\left(e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+,\ v \geq 0 \right)$ est majoré par un processus appartenant à $L^1(\Omega \times [0,1],\ d\mathbb{P} \otimes dv)$.

Soit $M \geq 1$ tel que $|\frac{m}{M\sigma^2}| \leq \beta$ (où β est défini dans l'hypothèse 5.1.1) et on a la majoration suivante :

$$e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+ \leq e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+$$
$$\leq e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} \left(\frac{|ln\frac{b}{x}-Y_1|}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{|G|\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right).$$

On développe l'exponentielle $e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} = e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} e^{\frac{m(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma^2 M}} e^{-\frac{m^2 r}{2\sigma^2 M}} \leq e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} e^{\frac{m(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma^2 M}}$, donc

$$e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+ \leq e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} e^{\frac{m(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma^2 M}} \left(\frac{|ln\frac{b}{x}-Y_1|}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{|G|\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right).$$

La fonction $x \mapsto x^{\frac{1}{2}} e^{-x}$ est continue, nulle en 0 et en $+\infty$, donc elle est bornée sur $\mathbb{R}_+$: il existe $c_{\frac{1}{2}} > 0$ tel que $x^{\frac{1}{2}} e^{-x} \leq c_{\frac{1}{2}}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$. On applique cette inégalité à $x = \frac{(ln\frac{b}{x}-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}$ et $e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} \frac{|ln\frac{b}{x}-Y_1|}{\sigma\sqrt{r}} \leq c_M$ où $c_M = c_{\frac{1}{2}}\sqrt{2M}$. Ainsi $e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+$ est majoré par

$$e^{\frac{m(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma^2 M}} \left(e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} \frac{|ln\frac{b}{x}-Y_1|}{\sigma\sqrt{r}} + e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-Y_1)^2}{2\sigma^2 rM}} \frac{|G|\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right) \leq e^{\frac{m(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma^2 M}} \left(c_M + \frac{|G|\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)$$

qui, par le choix de M et l'hypothèse 5.1.1, est un processus appartenant à $L^1(\Omega \times (0,1],\ d\mathbb{P} \otimes dv)$. Donc

$$lim_{r\to 0} \int_0^1 \mathbb{E}_0 \left[e^{-\frac{(ln\frac{b}{x}-mr-Y_1)^2}{2\sigma^2 r}} \left(\frac{-(ln\frac{b}{x}-Y_1)}{\sigma\sqrt{r}} + \frac{G\sqrt{v}}{\sqrt{1-v}} \right)_+ \right] dv$$
$$= \mathbb{P}(Y_1 = ln\frac{b}{x}) \mathbb{E}(G_+) \int_0^1 \sqrt{\frac{v}{1-v}} dv$$

et la limite $lim_{h\to 0}\frac{G(h)}{h}$ existe et vaut $\frac{a}{\sqrt{2\pi}}\mathbb{P}(Y_1 = ln\frac{b}{x})\mathbb{E}(G_+)\int_0^1 \sqrt{\frac{v}{1-v}}dv$. Mais d'une part on a $\mathbb{E}(G_+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty ge^{-\frac{g^2}{2}}dg = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ et d'autre part
$\int_0^1 \sqrt{\frac{v}{1-v}}dv = \int_0^1 (1-v)^{-1+\frac{1}{2}}v^{\frac{3}{2}-1}dv = B\left(\frac{3}{2},\frac{1}{2}\right)$, d'où le résultat.
D'après (1), la limite $lim_{h\to 0}\frac{A(h)}{h}$ existe et est égale à $lim_{h\to 0}\frac{G(h)}{h}$. □

Lemme 5.3.5 *Pour tout $t > 0$, $\varepsilon > 0$ et $\gamma < 1$, $\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\gamma}$ est intégrable. De plus $(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}$ est intégrable.*

Preuve
On décompose selon la valeur de N_t et on obtient

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\gamma}\right) =& \sum_{i\geq 1}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{N_t=i}\mathbf{1}_{t\geq T_i}(t-T_i)^{-1+\varepsilon}T_i^{-\gamma}\right)\\ \leq& \sum_{i\geq 1}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{t\geq T_i}(t-T_i)^{-1+\varepsilon}T_i^{-\gamma}\right)\\ =& \sum_{i\geq 1}\int_{0<s_1\ldots<s_i<t} a^i e^{-as_i}(t-s_i)^{-1+\varepsilon}s_i^{-\gamma}ds_i\ldots ds_1.\end{aligned}$$

On utilise d'abord le fait que $s_{i-1} < s_i$, donc $e^{-as_i} < e^{-as_{i-1}}$. Ensuite on fait le changement de variable $x = \frac{s_i}{t}$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\gamma}\right) \leq& t^{\varepsilon-\gamma}\sum_{i\geq 1}\int_{0<s_1\ldots<s_{i-1}<t} a^i e^{-as_{i-1}}\left(\int_{\frac{s_{i-1}}{t}}^1 (1-x)^{-1+\varepsilon}x^{-\gamma}dx\right)ds_{i-1}\ldots ds_1\\ \leq& t^{\varepsilon-\gamma}\sum_{i\geq 1}\int_{0<s_1\ldots<s_{i-1}<t} a^i e^{-as_{i-1}}\left(\int_0^1 (1-x)^{-1+\varepsilon}x^{(1-\gamma)-1}dx\right)ds_{i-1}\ldots ds_1\\ =& t^{\varepsilon-\gamma}B(1-\gamma,\varepsilon)a\sum_{i\geq 1}\int_{0<s_1\ldots<s_{i-1}<t} a^{i-1}e^{-as_{i-1}}ds_{i-1}\ldots ds_1\\ =& t^{\varepsilon-\gamma}B(1-\gamma,\varepsilon)a\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(N_t > i-1).\end{aligned}$$

On utilise le fait que pour une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$,
$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=0}^\infty \mathbb{P}(X > i)$. Ainsi $\sum_{i\geq 1}\mathbb{P}(N_t > i-1) = \sum_{i\geq 0}\mathbb{P}(N_t > i) = \mathbb{E}(N_t) = at$ et

$$\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\gamma}\right) \leq a^2 t^{\varepsilon-\gamma+1}B(1-\gamma,\varepsilon).$$

Pour montrer que $(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}$ est intégrable, on décompose d'abord

$$(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} = (t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}\mathbf{1}_{T_{N_t}>0} + t^{-1+\varepsilon}\mathbf{1}_{T_{N_t}=0}.$$

Le premier terme est intégrable (il suffit de prendre $\gamma = 0$) et le deuxième terme est majoré par $t^{-1+\varepsilon}$. $\square$

La proposition suivante s'appuye sur le lemme 5.3.5 et sert à démontrer le théorème 5.2.5.

Proposition 5.3.6 *Sous l'hypothèse 5.1.1* $\left(e^{\beta|Y_1|} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\right)$, *pour tout* $0 < \varepsilon \leq 1$ *et* $M \geq 1$ *tels que* $|\frac{2m}{M\sigma^2}| \leq \beta$, *la variable aléatoire* $(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} \exp[\frac{2m}{M\sigma^2}(ln\frac{b}{x} - Z_{T_{N_t}})]$ *est* $\mathbb{P}_0$*-intégrable.*

Preuve
On conditionne par $\sigma(N_u,\ u \leq t)$ sous l'espérance et $\mathbb{E}_0\left[(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} \exp[\frac{2m}{M\sigma^2}(ln\frac{b}{x} - Z_{T_{N_t}})]\right]$ est égale à

$$\mathbb{E}\left[(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}\mathbb{E}\left(\exp[\frac{2m}{M\sigma^2}(ln\frac{b}{x} - mT_{N_t} - \sigma W_{T_{N_t}} - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i)] \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right]$$
$$= e^{\frac{2m}{M\sigma^2}(ln\frac{b}{x})}\mathbb{E}\left[(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon} e^{-\frac{2m^2}{M\sigma^2}T_{N_t} + \frac{2m^2}{M^2\sigma^2}T_{N_t}}\left(\mathbb{E}\left(e^{-\frac{2m}{M\sigma^2}Y_1}\right)\right)^{N_t}\right].$$

Comme $M \geq 1$, alors $e^{-\frac{2m^2}{M\sigma^2}T_{N_t} + \frac{2m^2}{M^2\sigma^2}T_{N_t}} \leq 1$. De plus, par le choix de M, $\alpha = \mathbb{E}(e^{-\frac{2m}{M\sigma^2}Y_1}) < \mathbb{E}(e^{\beta|Y_1|}) < \infty$. Ainsi, nous sommes ramenés à montrer que la variable aléatoire $(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}\alpha^{N_t}$ est intégrable pour toute valeur de $\alpha > 0$.

Quand $\varepsilon = 1$, $\mathbb{E}\left[\alpha^{N_t}\right] = e^{at(\alpha - 1)} < \infty$ pour toute valeur de α.

Quand $\varepsilon < 1$, on prend $1 < p < \frac{1}{1-\varepsilon}$ et q tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. On applique l'inégalité de Hölder :

$$\mathbb{E}\left[(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}\alpha^{N_t}\right] \leq \mathbb{E}\left[(t - T_{N_t})^{p(-1+\varepsilon)}\right]^{\frac{1}{p}} \mathbb{E}\left[\alpha^{qN_t}\right]^{\frac{1}{q}}.$$

D'une part, $\mathbb{E}\left[\alpha^{qN_t}\right] = e^{at(\alpha^q - 1)} < \infty$ pour toute valeur de $\alpha > 0$. D'autre part, comme $1 < p < \frac{1}{1-\varepsilon}$, alors $p(-1+\varepsilon) > -1$ et d'après le lemme 5.3.5, $(t - T_{N_t})^{p(-1+\varepsilon)}$ est intégrable, d'où la conclusion. $\square$

Un autre résultat utile pour la preuve du théorème 5.2.5 est la proposition suivante :

Proposition 5.3.7 *Sous l'hypothèse 5.1.1* $\left(e^{\beta|Y_1|} \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})\right)$, *pour tout* $\varepsilon > 0$ *et* $0 < \eta < 1$, *la variable aléatoire* $(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}|Z_{T_{N_t}} - ln\frac{b}{x}|^{-\eta}$ *est* $\mathbb{P}_0$*-intégrable.*

Preuve
On décompose

$$\mathbb{E}_0\left((t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}|Z_{T_{N_t}} - ln\frac{b}{x}|^{-\eta}\right) \leq t^{-1+\varepsilon}\left(ln\frac{x}{b}\right)^{-\eta} + \mathbb{E}_0\left(\mathbf{1}_{T_{N_t} > 0}(t - T_{N_t})^{-1+\varepsilon}|Z_{T_{N_t}} - ln\frac{b}{x}|^{-\eta}\right).$$

On conditionne par $\sigma(N_u,\ u \leq t)$ sous l'espérance et $\mathbb{E}_0\left((t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}|Z_{T_{N_t}} - ln\frac{b}{x}|^{-\eta}\right)$ est majoré par

$$t^{-1+\varepsilon}\left(ln\frac{x}{b}\right)^{-\eta} + \mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}\mathbb{E}_0\left(|mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x}|^{-\eta} \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right].$$

Comme W est indépendant de T_{N_t} et de Y, on applique le lemme 5.3.3 à $G = \frac{W_{T_{N_t}}}{\sqrt{T_{N_t}}}$, $d = mT_{N_t} + \sum_{j=1}^{N_t} Y_j - ln\frac{b}{x}$, $c = \sigma\sqrt{T_{N_t}}$ et $\alpha = \eta$.

Ainsi $\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}\mathbb{E}_0\left(|mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x}|^{-\eta} \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right]$ est majoré par :

$$\mathbb{E}_0\left[\frac{\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}}{\sigma\sqrt{T_{N_t}}(1-\eta)}\mathbb{E}_0\left(\left|\frac{W_{T_{N_t}}}{\sqrt{T_{N_t}}}\right|\left|mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x}\right|^{1-\eta} \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right].$$

On utilise l'inégalité $xy \leq \frac{x^2+y^2}{2}$ pour $x = \frac{W_{T_{N_t}}}{\sqrt{T_{N_t}}}$ et $y = (mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x})^{1-\eta}$. Ensuite on applique l'inégalité $x_1^{1-\eta} \leq 1 + x_1$ à $x_1 = (mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{j=1}^{N_t} Y_j - ln\frac{b}{x})^2 \geq 0$ et on obtient que $\mathbb{E}_0\left(\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}|Z_{T_{N_t}} - ln\frac{b}{x}|^{-\eta}\right)$ est majoré par

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[\frac{\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}}{2\sigma\sqrt{T_{N_t}}(1-\eta)}\mathbb{E}_0\left(1 + (mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x})^{2-2\eta} \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right] \\
\leq &\mathbb{E}_0\left[\frac{\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}}{2\sigma\sqrt{T_{N_t}}(1-\eta)}\mathbb{E}_0\left(2 + (mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x})^{2} \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right] \\
= &\frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}\right]}{\sigma(1-\eta)} \\
+ &\frac{\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{\tau>T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}_0\left((mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x})^2 \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right]}{2\sigma(1-\eta)}.
\end{aligned} \tag{5.5}$$

Pour le premier terme de (5.5), on applique le lemme 5.3.5 avec $\gamma = \frac{1}{2}$: la variable aléatoire $\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable. Pour le deuxième terme de (5.5) on utilise l'inégalité $(x_1+x_2+x_3+x_4)^2 \leq 8(x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2)$ à $x_1 = mT_{N_t}$, $x_2 = \sigma W_{T_{N_t}}$, $x_3 = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ et $x_4 = -ln\frac{b}{x}$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}_0\left((mT_{N_t} + \sigma W_{T_{N_t}} + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - ln\frac{b}{x})^2 \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right] \\
\leq 8&\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}\left(m^2T_{N_t}^2 + \sigma^2 T_{N_t} + ln^2\frac{b}{x} + \mathbb{E}_0\left((\sum_{i=1}^{N_t} Y_i)^2 \mid \sigma(N_u, u \leq t)\right)\right)\right].
\end{aligned}$$

On majore $m^2T_{N_t}^2 + \sigma^2 T_{N_t} \le m^2t^2 + \sigma^2 t$ et ensuite on décompose selon la valeur de N_t.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}\mathbb{E}_0\left((mT_{N_t}+\sigma W_{T_{N_t}}+\sum_{i=1}^{N_t}Y_i - ln\frac{b}{x})^2 \mid \sigma(N_u, u\le t)\right)\right]\\
\le& 8\left(m^2t^2+\sigma^2 t + ln^2\frac{b}{x}\right)\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}\right]\\
&+8\sum_{j\ge 1}\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_j>0}\mathbf{1}_{N_t=j}(t-T_j)^{-1+\varepsilon}T_j^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{j}Y_i\right)^2\right].
\end{aligned}$$

La variable aléatoire $\mathbf{1}_{T_{N_t}>0}(t-T_{N_t})^{-1+\varepsilon}T_{N_t}^{-\frac{1}{2}}$ est intégrable (d'après le lemme 5.3.5 avec $\gamma = \frac{1}{2}$).

Maintenant on utilise $\left(\sum_{i=1}^{j} Y_i\right)^2 \le 2^{j-1}\sum_{i=1}^{j} Y_i^2$ et l'indépendance de Y et de T_j.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j\ge 1}\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_j>0}\mathbf{1}_{N_t=j}(t-T_j)^{-1+\varepsilon}T_j^{-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{j}Y_i\right)^2\right]\\
=&\mathbb{E}\left(Y_1^2\right)\sum_{j\ge 1} j2^{j-1}\mathbb{E}_0\left[\mathbf{1}_{T_j>0}\mathbf{1}_{N_t=j}(t-T_j)^{-1+\varepsilon}T_j^{-\frac{1}{2}}\right].
\end{aligned}$$

D'une part, d'après la remarque 5.1.2, $\mathbb{E}\left(Y_1^2\right) < \infty$ et d'autre part, en utilisant le même raisonnement que dans la preuve du lemme 5.3.5, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{j\ge 1} j2^{j-1}\mathbb{E}(\mathbf{1}_{T_j>0}\mathbf{1}_{N_t=j}T_j^{-\frac{1}{2}}(t-T_j)^{-1+\varepsilon}) \le& \frac{1}{2}\sum_{j\ge 1} j\int_{0<s_1\ldots<s_j<t}(2a)^j e^{-as_j}s_j^{-\frac{1}{2}}(t-s_j)^{-1+\varepsilon}ds_j\ldots ds_1\\
\le&\frac{at^{\varepsilon-\frac{1}{2}}B(\frac{1}{2},\varepsilon)}{2}\sum_{j\ge 1} j\frac{(2at)^j}{j!}\\
=&a^2t^{\varepsilon+\frac{1}{2}}B(\frac{1}{2},\varepsilon)e^{2at}.
\end{aligned}$$

$\square$

6. L'intensité d'un temps d'arrêt

Le but de ce chapitre est de donner quelques exemples d'utilisation de la densité d'un temps d'arrêt S, plus précisément lors du calcul de l'intensité de S associée à une certaine filtration.

A un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt S est associé le processus croissant càdlàg $H^S : t \mapsto 1_{S \leq t}$ et $\mathcal{F}^{H^S}$ la filtration complétée càd engendrée par ce processus $\mathcal{F}_t^{H^S} = \sigma(H_s^S,\ s \leq t)$. Dans la suite nous introduisons les notions de fonction intensité et de processus intensité associée à une filtration $\mathcal{F}$ non nécessairement égale à $\mathcal{G}$. Puis nous calculons la fonction intensité dans le cas particulier où V est le processus introduit dans la section 5.1 et le temps d'arrêt $S = \tau = inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$ (section 6.1), nous montrons qu'il n'existe pas de $\mathcal{F}^V$-intensité lorsque $\sigma > 0$ et nous finissons avec le calcul de l'intensité associée à une filtration engendrée par un processus continu qui est une information bruitée du signal V (section 6.2).

6.1. La fonction intensité d'un temps d'arrêt

6.1.1. Généralités

Nous rappelons quelques définitions et résultats de [42]. Dans toute cette section $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

Définition 6.1.1 *L'intensité d'un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt S, lorsqu'elle existe, est une fonction mesurable positive, non identiquement nulle, notée λ, telle que le processus*

$$t \mapsto D_t = 1_{S \leq t} - \int_0^t 1_{S > u} \lambda(u) du$$

soit une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_\cdot^{H^S})$ -martingale.

La fonction intensité est appelée aussi $\mathcal{F}^{H^S}$-intensité.

La notion de "fonction intensité" est liée à la notion de $\mathcal{F}^{H^S}$-projection duale prévisible du processus croissant H^S appelée aussi $\mathcal{F}^{H^S}$-compensateur. Nous rappelons la définition du $\mathcal{F}^{H^S}$-compensateur conformément à [77] page 305.

Définition 6.1.2 *Soit H un processus croissant intégrable tel que $H_0 = 0$ et $\mathcal{F}^H$ la filtration complétée càd engendrée par ce processus. Alors il existe un unique processus croissant A, $\mathcal{F}^H$-prévisible, càdlàg, $A_0 = 0$ tel que le processus $H - A$ soit une $\mathcal{F}^H$-martingale. Le processus A est la $\mathcal{F}^H$-projection duale prévisible de H.*

Si la fonction intensité d'un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt S existe alors le processus

$$t \mapsto A_t = \int_0^t 1_{S>u}\lambda(u)du$$

est la $\mathcal{F}^{H^S}$-projection duale prévisible de H^S.

En suivant [42], nous faisons l'hypothèse suivante :

Hypothèse 6.1.3 *Le temps d'arrêt S vérifie*

$$\mathbb{P}(S = 0) = 0 \quad \textit{et pour tout} \quad t > 0, \quad \mathbb{P}(S > t) > 0.$$

Dans [42], l'auteur définit la fonction intensité de S comme étant la fonction positive $\lambda(t) = \frac{f_S(t)}{1-F_S(t)}$, $t \geq 0$ où F_S est la fonction de répartition de S et f_S sa dénsité. Nous reprenons et complétons la preuve du lemme 2.3 page 6 de ce travail afin de montrer que notre définition et celle de [42] sont équivalentes :

Proposition 6.1.4 *Soit S un temps d'arrêt vérifiant l'hypothèse 6.1.3. Le temps d'arrêt S admet une $\mathcal{F}^{H^S}$-intensité si et seulement si S admet une densité par rapport à la mesure de Lebesgue, notée f_S.*

Dans ce cas la $\mathcal{F}^{H^S}$-intensité est unique et égale à

$$\lambda(t) = \frac{f_S(t)}{1 - F_S(t)}, \ t \geq 0$$

où F_S est la fonction de répartition de S.

La démonstration de cette proposition repose sur le lemme suivant démontré dans [42] :

Lemme 6.1.5 *(lemme 2.1 page 4 de [42])*
Soit S un temps d'arrêt vérifiant l'hypothèse 6.1.3. Pour toute variable aléatoire Y appartenant à $L^1(\Omega,\ \mathbb{P},\ \mathcal{G})$ et pour tout $s > 0$

$$\mathbb{E}(Y|\mathcal{F}_s^{H^S}) = \mathbf{1}_{S\leq s}\mathbb{E}(Y|S) + \mathbf{1}_{S>s}\frac{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{S>s}Y)}{\mathbb{P}(S > s)}.$$

En prenant $Y = \mathbf{1}_{S>t}$, pour $t > s$ dans le lemme 6.1.5 nous obtenons :

Corollaire 6.1.6 *Sous l'hypothèse 6.1.3, pour tout $t > s$,*

$$\mathbb{P}(S > t \mid \mathcal{F}_s^{H^S}) = 1_{S>s}\mathbb{P}(S > t \mid S > s).$$

Preuve de la proposition 6.1.4
1) Condition suffisante

Supposons que S admette une densité par rapport à la mesure de Lebesgue notée f_S. Nous posons $\lambda(t) = \frac{f_S(t)}{1-F_S(t)},\ t \geq 0$. Vérifions que $(\mathbf{1}_{S\leq t} - \int_0^t \mathbf{1}_{S>u}\lambda(u)du,\ t \geq 0)$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_{\cdot}^{H^S})$ -martingale.

D'une part, soit $t > s$. Etant donné que λ est déterministe

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t 1_{S>u}\lambda(u)du \mid \mathcal{F}_s^{H^S}\right] = \int_s^t \lambda(u)\mathbb{P}\left(S > u \mid \mathcal{F}_s^{H^S}\right)du.$$

Or d'après le corollaire 6.1.6, pour $u > s$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S > u \mid \mathcal{F}_s^{H^S}) =& \mathbf{1}_{S>s}\mathbb{P}(S > u \mid S > s)\\ =& \mathbf{1}_{S>s}\left[1 - \mathbb{P}(S \leq u \mid S > s)\right]\\ =& \mathbf{1}_{S>s}\left[1 - \frac{F_S(u) - F_S(s)}{1 - F_S(s)}\right],\end{aligned}$$

d'où

$$\mathbb{E}\left[\int_s^t 1_{S>u}\lambda(u)du \mid \mathcal{F}_s^{H^S}\right] = \mathbf{1}_{S>s}\frac{1}{1 - F_S(s)}\int_s^t \lambda(u)\left[1 - F_S(u)\right]du.$$

D'après la définition de λ, nous obtenons

$$\mathbb{E}[\int_s^t 1_{S>u}\lambda(u)du \mid \mathcal{F}_s^{H^S}] = \mathbf{1}_{S>s}\frac{F_S(t) - F_S(s)}{1 - F_S(s)}. \tag{6.1}$$

D'autre part, en utilisant le corollaire 6.1.6,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{S\leq t} - \mathbf{1}_{S\leq s} \mid \mathcal{F}_s^{H^S}\right] =& \mathbf{1}_{S>s} - \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{S>t} \mid \mathcal{F}_s^{H^S}\right]\\ =& \mathbf{1}_{S>s}\mathbb{P}(S \leq t \mid S > s)\\ =& \mathbf{1}_{S>s}\frac{F_S(t) - F_S(s)}{1 - F_S(s)}.\end{aligned} \tag{6.2}$$

Ainsi il y a égalité entre les relations (6.1) et (6.2). Nous en déduisons que le processus

$$t \mapsto D_t = \mathbf{1}_{S\leq t} - \int_0^t \mathbf{1}_{S>u}\lambda(u)du$$

est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_{\cdot}^{H^S})$ -martingale et que S admet λ pour $\mathcal{F}^{H^S}$-intensité.

2) Condition nécessaire

Réciproquement, si S admet une intensité λ, alors en prenant l'espérance de D_t

$$F_S(t) = \int_0^t \lambda(u)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{S>u})du$$

donc F_S admet une dérivée par rapport à la mesure de Lebesgue égale à

$$f_S(t) = \lambda(t)\mathbb{E}(\mathbf{1}_{S>t}),\ t \geq 0,$$

d'où la forme de λ attendue.

3) Unicité

Supposons maintenant qu'il existe $\tilde{\lambda} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable positive, non identiquement nulle, telle que le processus

$$t \mapsto 1_{S\leq t} - \int_0^t 1_{S>u}\tilde{\lambda}(u)du$$

soit une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{H^S}_{.})$ -martingale. Alors le processus $t \mapsto \int_0^t 1_{S>u}\left(\tilde{\lambda}(u) - \lambda(u)\right) du$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{H^S}_{.})$ -martingale nulle en 0 et

$$\int_0^t \left(\tilde{\lambda}(u) - \lambda(u)\right) \mathbb{P}(S > u)du = 0 \text{ pour tout } t \geq 0.$$

En conséquence $\left(\tilde{\lambda}(t) - \lambda(t)\right) \mathbb{P}(S > t) = 0$ pour tout $t \geq 0$. Or sous l'hypothèse 6.1.3, $\mathbb{P}(S > t) > 0$ pour tout $t \geq 0$, d'où $\tilde{\lambda}(t) = \lambda(t)$ pour tout $t \geq 0$. □

Remarque 6.1.7 *Le temps d'arrêt S admet une $\mathcal{F}^{H^S}$-intensité si et seulement si le $\mathcal{F}^{H^S}$-compensateur du processus H^S est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue. Dans ce cas, si a est la densité de A par rapport à la mesure de Lebesgue, cela devient*

$$\mathbb{P}(S \leq t) = \mathbb{E}(A_t) = \int_0^t \mathbb{E}(a(u))du.$$

Interprétation économique

Dans ce paragraphe nous écrivons la fonction intensité λ sous une autre forme que celle de la proposition 6.1.4. Cette nouvelle forme nous permettra de donner une interprétation économique à λ.

D'après la proposition 6.1.4, $\lambda(t) = \frac{f_S(t)}{1-F_S(t)}$ pour tout $t \geq 0$. Or f_S est la dérivée de la fonction de répartition F_S, donc

$$\begin{aligned}\lambda(t) =& lim_{h\to 0}\frac{F_S(t+h)-F_S(t)}{h(1-F_S(t))} = lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}(S\leq t+h)-\mathbb{P}(S\leq t)}{h\mathbb{P}(S>t)}\\ =& lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}(t<S\leq t+h)}{h\mathbb{P}(S>t)} = lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}(S\leq t+h|S>t)}{h}.\end{aligned}$$

Le calcul de l'intensité peut être appliqué dans le domaine financier. Ainsi nous considérons un processus stochastique V représentant la valeur des actifs d'une entreprise et le temps d'arrêt $S = \tau = inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$ l'instant de liquidation de l'entreprise. Quand les acteurs du marché (investisseurs, actionnaires d'une entreprise...) ne peuvent pas anticiper la faillite (appelée aussi défaut), ils essaient de calculer la probabilité d'apparition du défaut à chaque l'instant t en fonction de l'information dont ils disposent.

Pour un intervalle de temps Δh assez petit, la probabilité conditionnelle à l'instant t, que le défaut se produise entre t et $t+\Delta h$ (c'est à dire $\mathbb{P}(S \leq t+\Delta h \mid S > t)$) est de l'ordre de $\lambda(t)\Delta h$. Ainsi, les agents dont la seule information à chaque instant t est si l'instant de liquidation est survenu ou pas, essaient de calculer la fonction intensité λ.

6.1.2. Un exemple : l'intensité d'un temps d'atteinte dans le cas d'un processus mixte diffusion-sauts

Dans cette sous-section nous calculons la fonction intensité dans le cas particulier où $S = \tau = inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$ et V est le processus introduit dans la section 5.1 :

$$V = xe^Z \quad \text{où} \quad Z_t = mt + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i, \quad t \geq 0,$$

$x > 0$, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $(W_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien standard, $(N_t,\ t \geq 0)$ un processus de Poisson d'intensité constante positive a, $(Y_i,\ i \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes.

Dans la suite la fonction de répartition de τ est notée F_τ :

$$F_\tau(t,x) = \mathbb{P}_x(\tau \leq t) \ \text{ pour tout } \ t \geq 0.$$

Sous l'hypothèse 5.1.1, nous rappelons que la fonction F_τ est dérivable en t et sa dérivée introduite dans le théorème 5.2.5 est notée f_τ.

Proposition 6.1.8 *Soit le processus V et τ le temps d'arrêt défini par*
$\tau = inf\{u \geq 0 : V_u \leq b\}$ avec $b \in]0,\ x[$. Alors sous l'hypothèse 5.1.1,
1) $F_\tau(t,x) < 1$ pour tout $t > 0$,

2) La fonction intensité de τ existe et elle est égale à λ introduite dans la proposition 6.1.4, c'est à dire que le processus

$$t \mapsto D_t = 1_{\tau \le t} - \int_0^t 1_{\tau > u} \frac{f_\tau(u,x)}{1 - F_\tau(u,x)} du$$

est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{H^\tau})$-martingale.

Preuve
1) On se propose de montrer que $\mathbb{P}(\tau \ge t) < 1$ pour tout $t > 0$, soit $\mathbb{P}_x(\tau > t) > 0$ pour tout $t > 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe $t_0 > 0$ tel que $\mathbb{P}_x(\tau > t_0) = 0$. Alors pour tout $t \ge t_0$, $\mathbb{P}_x(\tau \le t) = 1$ et la dérivée de la fonction de répartition de τ est nulle : $f_\tau(t,x) = 0$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement pour tout $t \ge t_0$, soit

$$a\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t} F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right) + \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} f(t - T_{N_t}, ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}})\right) = 0.$$

Comme $\tau \le t$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, la première espérance est nulle, donc pour tout $t \ge t_0$:

$$\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} f(t - T_{N_t}, ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}})\right) = 0.$$

D'une part $t - T_{N_t} > 0$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement et d'autre part sur l'événement $\{\omega : \tau(\omega) > T_{N_t}(\omega)\}$, $ln\frac{b}{V_{T_{N_t}}} < 0$. La fonction $f(u,z) > 0$, pour tout $u > 0$ et $z < 0$ donc pour tout $t \ge t_0$ $\mathbb{P}_x$-presque sûrement $\mathbf{1}_{\tau > T_{N_t}} = 0$, en particulier $\mathbf{1}_{\tau > T_{N_{t_0}}} = 0$.

Or $\mathbf{1}_{\tau > T_{N_{t_0}}} = \sum_{n \ge 0} \mathbf{1}_{N_{t_0} = n} \mathbf{1}_{\tau > T_n}$. Donc pour tout $n \ge 0$, le produit $\mathbf{1}_{N_{t_0}=n}\mathbf{1}_{\tau > T_n}$ est nul $\mathbb{P}_x$-presque sûrement, en particulier $\mathbf{1}_{N_{t_0}=0}\mathbf{1}_{\tau>0}$ ce qui n'est pas vrai puisque

$$\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{N_{t_0}=0}\mathbf{1}_{\tau>0}\right) = \mathbb{P}_x(N_{t_0} = 0)\mathbb{P}_x(\bar{\tau} > 0) = e^{-at_0} \ne 0.$$

2) D'après la proposition 6.1.4 et le théorème 5.2.5, pour démontrer que la fonction intensité de τ existe, il suffit de montrer que τ vérifie l'hypothèse 6.1.3.

La première condition, c'est à dire $\mathbb{P}_x(\tau = 0) = \mathbb{P}_x(\bar{\tau} = 0) = 0$, est satisfaite dès que $x > b$. D'après 1), la deuxième condition, c'est à dire $\mathbb{P}_x(\tau > t) > 0$ pour tout $t > 0$, est également vérifiée.

On conclut avec la proposition 6.1.4. □

Corollaire 6.1.9 *Le processus $t \mapsto H_t^\tau = \mathbf{1}_{\tau \le t}$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{H^\tau})$-semimartingale de décomposition*

$$t \mapsto \mathbf{1}_{\tau \le t} = D_t + \int_0^t \mathbf{1}_{\tau > u} \frac{f_\tau(u,x)}{1 - F_\tau(u,x)} du$$

avec D une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{H^\tau})$-martingale.

6.2. L'intensité d'un temps d'arrêt associée à une filtration $\mathcal{F}$

Nous reprenons l'approche de [42] que nous complétons avec des résultats de [25] et [68] sur la projection duale prévisible. Dans ce paragraphe, nous considérons la situation suivante :

Soit $(\Omega, \mathcal{G}, (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et S un $\mathcal{G}$-temps d'arrêt. Nous rappelons qu'à ce temps d'arrêt est associé le processus croissant càdlàg

$$H^S : t \mapsto 1_{S\leq t}$$

et $\mathcal{F}^{H^S}$ la filtration complétée càd engendrée par ce processus.

Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, \ \ t \geq 0)$ une filtration donnée (S n'étant pas nécessairement un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt). On définit alors la filtration càd $\mathcal{I} = \mathcal{F} \vee \mathcal{F}^{H^S}$, c'est à dire

$$\mathcal{I}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s \vee \mathcal{F}_s^{H^S} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Dans ce cas S est un $(\mathcal{I}_t, \ \ t \geq 0)$ temps d'arrêt. On note $\mathcal{F}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{F}_t$ et $\mathcal{I}_\infty = \bigvee_{t\geq 0} \mathcal{I}_t$.

Remarque 6.2.1 *Le processus H^S est càd, croissant, positif et borné par 1, c'est une $(\mathbb{P}, \ \mathcal{I})$-sousmartingale de classe D (donc une $(\mathbb{P}, \ \mathcal{I})$-semimartingale d'après le théorème 2.18 page 32 de [37]). D'après le théorème de décomposition de Doob (voir par exemple théorème 4.10 page 24 de [44] et chapitre VII de [26]), ce processus se met sous la forme*

$$H^S = D + A$$

où D est une $(\mathbb{P}, \ \mathcal{I})$-martingale uniformément intégrable, nulle en 0 et A est un processus càd, $(\mathbb{P}, \ \mathcal{I})$-prévisible, intégrable, croissant et nul en 0 (A est le $(\mathbb{P}, \ \mathcal{I})$-compensateur prévisible du processus H^S).

Le processus A peut être approché par des processus croissants construits explicitement à partir de H^S (théorème T54 page 121 de [25] ou théorème T29 de [68]).

Proposition 6.2.2 *Soit $(A^h)_{h\in]0,1]}$ la famille de processus définis par*

$$A_t^h = \frac{1}{h} \int_0^t \left[\mathbb{E}(H_{s+h}^S \mid \mathcal{I}_s) - H_s^S\right] ds, \ t \in \mathbb{R}_+, \ h \in]0, 1].$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a, au sens de la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$:

$$A_t = lim_{h\to 0} A_t^h$$

c'est à dire $\mathbb{E}(ZA_t) = lim_{h\to 0}\mathbb{E}(ZA_t^h)$ pour toute variable aléatoire positive bornée $\mathcal{I}_\infty$-mesurable Z.

On reprend ici la preuve de [25] en fournissant une preuve un peu plus détaillée.

Preuve

Pour $t \geq 0$ on pose $M_t = \mathbb{E}(Z \mid \mathcal{I}_t)$. Le processus $(M_t,\ t \geq 0)$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{I})$-martingale bornée continue à droite.

La relation $\mathbb{E}(ZA_t) = lim_{h\to 0}\mathbb{E}(ZA_t^h)$ est équivalente à la relation

$$\mathbb{E}(M_tA_t) = lim_{h\to 0}\mathbb{E}(M_tA_t^h).$$

D'après le théorème T47 page 93 de [25], cette dernière relation s'écrit

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s dA_s\right) = lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s dA_s^h\right). \tag{6.3}$$

D'après la définition de A^h et comme H_s est $\mathcal{I}_s$-adapté

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s dA_s^h\right) = \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s \mathbb{E}\left(H_{s+h}^S - H_s^S \mid \mathcal{I}_s\right) ds\right).$$

En utilisant la décomposition de H^S ($H^S = D + A$), nous obtenons

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s dA_s^h\right) = \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s \mathbb{E}\left(A_{s+h} - A_s \mid \mathcal{I}_s\right) ds\right).$$

Or M_s est $\mathcal{I}_s$-mesurable

$$M_s\mathbb{E}(A_{s+h} - A_s \mid \mathcal{I}_s) = \mathbb{E}\left(M_s(A_{s+h} - A_s) \mid \mathcal{I}_s\right)$$

et comme le terme $M_s(A_{s+h} - A_s)$ est positif on peut intervertir l'espérance et l'intégrale :

$$\frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbb{E}\left(M_s(A_{s+h} - A_s) \mid \mathcal{I}_s\right) ds\right) = \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\int_0^t M_s(A_{s+h} - A_s) ds\right). \tag{6.4}$$

D'après le théorème de Fubini-Tonelli,

$$\begin{aligned}\frac{1}{h}\int_0^t M_s(A_{s+h} - A_s)ds =& \frac{1}{h}\int_0^t M_s \left(\int_s^{s+h} dA_u\right) ds \\ =& \frac{1}{h}\int_0^{t+h}\left(\int_{(u-h)^+}^{t\wedge u} M_s ds\right) dA_u \end{aligned} \tag{6.5}$$

où $(x)^+ = max(0, x)$.

Or pour $0 \leq u \leq t + h$,

$$\frac{1}{h}\int_{(u-h)^+}^{t\wedge u} M_s ds \leq \frac{1}{h}(t\wedge u - (u-h)^+)||Z||_\infty \leq ||Z||_\infty.$$

En effet
$$t \wedge u - (u-h)^+ \leq u - (u-h)^+ = \begin{cases} h & si\ u \geq h \\ u & si\ u < h \end{cases}$$
et dans tous les cas $t \wedge u - (u-h)^+ \leq h$.

Ainsi $\left|\frac{1}{h}\int_0^{t+h}\left(\int_{(u-h)^+}^{t\wedge u} M_s ds\right) dA_u\right| \leq ||Z||_\infty A_\infty$ et converge presque sûrement vers $\int_0^t M_{u^-} dA_u$ quand h tend vers 0 car M est borné càdlàg. Donc d'après le théorème de convergence dominée dans (6.4),
$$lim_{h\to 0}\mathbb{E}\left(\frac{1}{h}\int_0^t M_s(A_{s+h}-A_s)ds\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t M_{u^-} dA_u\right).$$
Mais A est un processus prévisible, donc d'après le théorème T27 page 105 de [25], $\mathbb{E}\left(\int_0^t M_{u^-} dA_u\right) = \mathbb{E}\left(\int_0^t M_u dA_u\right)$ et la relation (6.3) est démontrée. □

Remarque 6.2.3 *Si le processus A est continu, alors la convergence a lieu dans L^1 (théorème T37, page 165 de [68])*
$$A_t =^{L^1} lim_{h\to 0} A_t^h.$$

Corollaire 6.2.4 *Supposons que le $(\mathbb{P},\ \mathcal{I})$-compensateur prévisible A du processus croissant H^S est absolument continu par rapport à la mesure de Lebesgue, de dérivée notée a. Si cette dérivée est un processus $\mathcal{I}$-adapté, continu dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}^+$:*
$$a(t) =^{L^1} lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{E}\left(H^S_{t+h} - H^S_t|\mathcal{I}_t\right)}{h}.$$

Preuve
Soit $t > 0$.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\left|a(t) - \frac{\mathbb{E}\left(H^S_{t+h} - H^S_t|\mathcal{I}_t\right)}{h}\right|\right) =& \mathbb{E}\left(\left|a(t) - \frac{\mathbb{E}\left(A_{t+h} - A_t|\mathcal{I}_t\right)}{h}\right|\right) \\ =& \frac{1}{h}\mathbb{E}\left(\left|\mathbb{E}\left(\int_t^{t+h} a(t) - a(u)du|\mathcal{I}_t\right)\right|\right).\end{aligned}$$
D'où
$$\mathbb{E}\left(\left|a(t) - \frac{\mathbb{E}\left(H^S_{t+h} - H^S_t|\mathcal{I}_t\right)}{h}\right|\right) \leq \frac{1}{h}\int_t^{t+h}\mathbb{E}\left(|a(t)-a(u)|\right)du.$$
On conclut en faisant tendre h vers 0. □

A présent nous pouvons définir la notion d'intensité associée à la filtration $\mathcal{F}$.

Définition 6.2.5 *La $\mathcal{F}$-intensité du temps d'arrêt S, si elle existe, est un processus $(\mathbb{P},\ \mathcal{F})$-adapté positif, non identiquement nul, noté $\lambda^{\mathcal{F}}$, tel que le processus*

$$t \mapsto D_t = \mathbf{1}_{S \le t} - \int_0^t \mathbf{1}_{S>u} \lambda^{\mathcal{F}}(u) du$$

soit une $(\mathbb{P},\ \mathcal{I})$-martingale.

La $\mathcal{F}$-intensité existe si et seulement si le $(\mathbb{P},\ \mathcal{I})$-compensateur prévisible de H^S est absolument continu. Dans ce cas le $(\mathbb{P},\ \mathcal{I})$-compensateur prévisible de H^S est de la forme

$$A_t = \int_0^t \mathbf{1}_{S>u} \lambda^{\mathcal{F}}(u) du,\ t \ge 0.$$

Si la $\mathcal{F}$-intensité existe et le processus $t \mapsto \mathbf{1}_{S>t}\lambda^{\mathcal{F}}(t)$ est continu dans $L^1(\Omega, \mathbb{P})$, alors d'après le corollaire 6.2.4, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\mathbf{1}_{S>t}\lambda^{\mathcal{F}}(t) =^{L^1} lim_{h\to 0} \frac{\mathbb{P}\left(t < S \le t+h | \mathcal{I}_t\right)}{h},$$

d'où l'intérêt des économistes pour ce type d'étude. En effet V peut représenter la valeur des actifs d'une entreprise, S l'instant de défaut et $\mathbb{P}\left(t < S \le t+h | \mathcal{I}_t\right)$ la probabilité d'apparition du défaut entre t et $t+h$, calculée par les agents qui à chaque instant t disposent de l'information $\mathcal{I}_t$.

Deux situations seront présentées : quand S est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt et quand S n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt.

6.2.1. Cas où S est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt

Généralités

Si S est un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt, alors $\mathcal{F} = \mathcal{I}$ et dans la définition 6.2.5, D est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F})$-martingale.

Nous reprenons les notations de [77] et nous nous plaçons dans un cadre particulier, plus précisement quand la filtration $\mathcal{F}$ est engendrée par un processus de Feller.

Soit X un processus de Feller de loi initiale μ, $\mathcal{F}^0$ la filtration engendrée par X : $\mathcal{F}^0_t = \sigma(X_s, s \le t)$ et $\mathcal{F}^\mu$ "l'augmentation habituelle" de $\mathcal{F}^0$. Soit $S > 0$ un $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt. Nous nous intéressons aux conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de la $\mathcal{F}^\mu$-intensité de S.

On introduit les $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt suivants :

$$S_1 = \begin{cases} S & si\ X_S = X_{S^-} \\ +\infty & si\ X_S \ne X_{S^-} \text{ ou } S = \infty, \end{cases} \qquad S_2 = \begin{cases} S & si\ X_S \ne X_{S^-} \\ +\infty & si\ X_S = X_{S^-} \text{ ou } S = \infty. \end{cases}$$

Les deux résultats suivants démontrés dans [77] permettent de caractériser les temps d'arrêt S_1 et S_2 :

Théorème 6.2.6 *(théorème de Meyer page 338 de [77])*
Soit X un processus de Feller de loi initiale μ. On introduit $\mathcal{F}^0$ la filtration engendrée par X : $\mathcal{F}^0_t = \sigma(X_s,\ s \leq t)$ et $\mathcal{F}^\mu$ "l'augmentation habituelle" de $\mathcal{F}^0$. Soit $S > 0$ un $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :
(1) S est un $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt prévisible.
(2) $X_S = X_{S^-}$, $\mathbb{P}^\mu$-presque sûrement sur $\{\omega : S(\omega) < \infty\}$.

Corollaire 6.2.7 *(corollaire 15.2 page 338 de [77])*
Un $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt S est totalement inaccessible si et seulement si $X_S \neq X_{S^-}$ sur $\{\omega : 0 < S(\omega) < \infty\}$.

Ainsi d'après le théorème de Meyer 6.2.6 et le corollaire 6.2.7, le temps d'arrêt S_1 est $\mathcal{F}^\mu$-prévisible et S_2 est $\mathcal{F}^\mu$-totalement inaccessible.

Remarque 6.2.8 *(1) Soit H^{S_1} le processus croissant càdlàg $H^{S_1} : t \mapsto \mathbf{1}_{S_1 \leq t}$. Comme S_1 est un $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt prévisible, alors H^{S_1} est sa propre $\mathcal{F}^\mu$-projection duale prévisible. Donc S_1 n'admet pas de $\mathcal{F}^\mu$-intensité.*
(2) En utilisant le théorème 21.10 page 352 de [77], comme S_2 est un $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt totalement inaccessible, alors sa $\mathcal{F}^\mu$-projection duale prévisible est continue.

Remarque 6.2.9 *Si de plus le temps d'arrêt S_2 admet une $\mathcal{F}^\mu$-intensité, alors sa fonction de répartition est dérivable. En effet si S_2 admet une $\mathcal{F}^\mu$-intensité notée λ_2, alors la décomposition de la $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\mu_\cdot)$-semimartingale $H^{S_2} : t \mapsto \mathbf{1}_{S_2 \leq t}$ est*

$$H^{S_2}_t = D_t + \int_0^t \mathbf{1}_{S_2 > u} \lambda_2(u) du,\ t \geq 0.$$

En prenant l'espérance

$$\mathbb{P}_{X_0}(S_2 \leq t) = \mathbb{E}_{X_0}\left(\int_0^t \mathbf{1}_{S_2 > u} \lambda_2(u) du\right) = \int_0^t \mathbb{E}_{X_0}\left(\mathbf{1}_{S_2 > u} \lambda_2(u)\right) du.$$

Une condition suffisante pour l'existence de la $\mathcal{F}^\mu$-intensité de S_2, serait une "bonne forme" de la dérivée de sa fonction de répartition, comme dans le lemme suivant :

Lemme 6.2.10 *On suppose qu'il existe un processus λ_2 $\mathcal{F}^\mu$-adapté, positif, markovien, non identiquement nul. On note $f_2 : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par*

$$f_2(t, x) = \mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{S_2 > t} \lambda_2(t)\right).$$

Si pour tout $t \geq 0$ et $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{P}_x(S_2 \leq t) = \int_0^t f_2(u, x) du,$$

alors le temps d'arrêt S_2 admet pour $\mathcal{F}^\mu$-intensité le processus λ_2.

Preuve
Il suffit de montrer que le processus $t \to \mathbf{1}_{S_2 \leq t} - \int_0^t \mathbf{1}_{S_2 > u} \lambda_2(u) du$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\mu)$-martingale.

Soit $(h, t) \in \mathbb{R}_+^2$. En utilisant la propriété de Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_0}(t < S_2 \leq t + h \mid \mathcal{F}_t^\mu) =& \mathbf{1}_{S_2 > t} \mathbb{P}_{X_t}(S_2 \leq h) \\ =& \mathbf{1}_{S_2 > t} \int_0^h \mathbb{E}_{X_t} \left(\mathbf{1}_{S_2 > u} \lambda_2(u) \right) du.\end{aligned}$$

Comme le processus λ_2 est markovien, alors

$$\mathbf{1}_{S_2 > t} \int_0^h \mathbb{E}_{X_t} \left(\mathbf{1}_{S_2 > u} \lambda_2(u) \right) du = \int_0^h \mathbb{E}_{X_0} \left(\mathbf{1}_{S_2 > u+t} \lambda_2(u + t) \mid \mathcal{F}_t^\mu \right) du.$$

On conclut avec le changement de variable $u \to u + t$ et le théorème de Fubini. □

Une conséquence de la remarque 6.2.8 et du lemme 6.2.10 est le résultat suivant :

Théorème 6.2.11 *(1) Si $\mathbb{P}_{X_0}(S_1 = \infty) = 1$ et S_2 vérifie les hypothèses du lemme 6.2.10, alors le temps d'arrêt S admet une $\mathcal{F}^\mu$-intensité.*
(2) Si $\mathbb{P}_{X_0}(S_1 = \infty) < 1$, alors le $\mathcal{F}^\mu$-compensateur de S est de la forme

$$t \mapsto A_t = \mathbf{1}_{S_1 \leq t} + A_t^2$$

avec A^2 le $\mathcal{F}^\mu$-compensateur de S_2. Dans ce cas le temps d'arrêt S n'admet pas de $\mathcal{F}^\mu$-intensité.

Preuve
(1) Si $\mathbb{P}_{X_0}(S_1 = \infty) = 1$, alors $S = S_2$ $\mathbb{P}_{X_0}$-presque sûrement. On conclut avec le lemme 6.2.10.
(2) La clé de la preuve est de remarquer que $\mathbf{1}_{S \leq t} = \mathbf{1}_{S_1 \leq t} + \mathbf{1}_{S_2 \leq t}$ pour tout $t \geq 0$. Ensuite le processus

$$t \mapsto \mathbf{1}_{S \leq t} - \mathbf{1}_{S_1 \leq t} - A_t^2$$

est une $\mathcal{F}^\mu$-martingale.

Le processus $t \mapsto \mathbf{1}_{S_1 \leq t} + A_t^2$ est un processus croissant, $\mathcal{F}^\mu$-prévisible nul en 0 (il est la somme de deux processus croissants $\mathcal{F}^\mu$-prévisibles, nuls en 0). Mais à cause de l'indicatrice $\mathbf{1}_{S_1 \leq t}$, ce processus n'est pas absolument continu, donc S n'admet pas de $\mathcal{F}^\mu$-intensité. □

Dans la suite nous nous intéressons aux conditions vérifiées par la $\mathcal{F}^\mu$-intensité de S lorsqu'elle existe.

Lemme 6.2.12 *Si le $\mathcal{F}^\mu$-temps d'arrêt S admet une $\mathcal{F}^\mu$-intensité notée $\lambda^{\mathcal{F}}$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $u \in \mathbb{R}_+$*

$$\mathbf{1}_{S>t}\mathbb{E}_{X_t}\left[\mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u)\right] = \mathbb{E}_{X_0}\left[\mathbf{1}_{S>u+t}\lambda^{\mathcal{F}}(u+t) \mid \mathcal{F}_t^\mu\right] \;\; du \otimes d\mathbb{P}\text{-presque sûrement.}$$

Preuve
Comme S admet une $\mathcal{F}^\mu$-intensité, alors la décomposition de la $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^\mu_.)$-semimartingale H^S est

$$H_t^S = D_t + \int_0^t \mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u)du, \quad t \geq 0.$$

Ainsi, d'une part pour tout couple $(h,t) \in \mathbb{R}_+^2$,

$$\mathbb{P}_{X_0}\left(t < S \leq t+h \mid \mathcal{F}_t^\mu\right) = \mathbb{E}_{X_0}\left[\int_t^{t+h} \mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u)du \mid \mathcal{F}_t^\mu\right],$$

soit en utilisant le théorème de Fubini Tonelli,

$$\mathbb{P}_{X_0}\left(t < S \leq t+h \mid \mathcal{F}_t^\mu\right) = \int_t^{t+h} \mathbb{E}_{X_0}\left[\mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u) \mid \mathcal{F}_t^\mu\right] du. \tag{6.6}$$

D'autre part, en utilisant la propriété de Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_0}\left(t < S \leq t+h \mid \mathcal{F}_t^\mu\right) =& \mathbf{1}_{S>t}\mathbb{E}_{X_t}\left(\mathbf{1}_{S\leq h}\right)\\ =& \mathbf{1}_{S>t}\int_0^h \mathbb{E}_{X_t}\left[\mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u)\right] du\\ =& \int_t^{t+h} \mathbf{1}_{S>t}\mathbb{E}_{X_t}\left[\mathbf{1}_{S>u+t}\lambda^{\mathcal{F}}(u+t)\right] du. \end{aligned}\tag{6.7}$$

Pour passer de la première égalité à la deuxième nous avons utilisé la décomposition de H^S et le théorème de Fubini, puis pour la dernière égalité nous avons fait le changement de variable $u \to u+t$.
Ainsi pour tout couple $(h,t) \in \mathbb{R}_+^2$, les deux relations (6.6) et (6.7) sont égales, d'où la conclusion. □

Si le temps d'arrêt S admet une $\mathcal{F}^{H^S}$-intensité et également une $\mathcal{F}^\mu$-intensité, alors il existe une relation entre les deux, donnée par le lemme suivant.

Lemme 6.2.13 *Si le temps d'arrêt S admet une $\mathcal{F}^{H^S}$-intensité notée λ et une $\mathcal{F}^\mu$-intensité notée $\lambda^{\mathcal{F}}$, alors pour tout $u \geq 0$,*

$$\mathbf{1}_{S>u}\lambda(u) = \mathbf{1}_{S>u}\mathbb{E}_{X_0}\left(\lambda^{\mathcal{F}}(u) \mid \mathcal{F}_u^{H^S}\right).$$

Preuve
Il suffit de vérifier que le processus

$$t \mapsto \mathbf{1}_{S\leq t} - \int_0^t \mathbf{1}_{S>u}\mathbb{E}_{X_0}\left(\lambda^{\mathcal{F}}(u) \mid \mathcal{F}_u^{H^S}\right) du$$

est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_\cdot^{H^S})$-martingale.

Soit $(h,t) \in \mathbb{R}_+^2$, comme $\mathcal{F}_t^{H^S} \subset \mathcal{F}_t^{\mu}$, alors en conditionnant par $\mathcal{F}_t^{\mu}$ sous l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{P}_{X_0}\left(t < S \leq t+h \mid \mathcal{F}_t^{H^S}\right) = \mathbb{E}_{X_0}\left[\mathbb{E}_{X_0}\left(\mathbf{1}_{t<S\leq t+h} \mid \mathcal{F}_t^{\mu}\right) \mid \mathcal{F}_t^{H^S}\right].$$

Or $\mathbb{E}_{X_0}\left(\mathbf{1}_{t<S\leq t+h} \mid \mathcal{F}_t^{\mu}\right) = \mathbb{E}_{X_0}\left(\int_t^{t+h} \mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u)du \mid \mathcal{F}_t^{\mu}\right)$, d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{X_0}\left(t < S \leq t+h \mid \mathcal{F}_t^{H^S}\right) =&\mathbb{E}_{X_0}\left[\mathbb{E}_{X_0}\left(\int_t^{t+h} \mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u)du \mid \mathcal{F}_t^{\mu}\right) \mid \mathcal{F}_t^{H^S}\right]\\ =&\mathbb{E}_{X_0}\left[\int_t^{t+h} \mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u)du \mid \mathcal{F}_t^{H^S}\right].\end{aligned}$$

D'après le théorème de Fubini,

$$\mathbb{P}_{X_0}\left(t < S \leq t+h \mid \mathcal{F}_t^{H^S}\right) = \int_t^{t+h} \mathbb{E}_{X_0}\left[\mathbf{1}_{S>u}\lambda^{\mathcal{F}}(u) \mid \mathcal{F}_t^{H^S}\right] du.$$

On conditionne par $\mathcal{F}_u^{H^S}$ sous l'espérance conditionnelle et on conclut en appliquant à nouveau le théorème de Fubini. □

Le lemme 6.2.13 reste vrai pour toute filtration $\mathcal{F}^{\mu}$, non nécessairement engendrée par un processus de Feller-Dynkin.

Un exemple : calcul de la projection duale prévisible d'un temps d'atteinte dans le cas d'un processus mixte diffusion-sauts

Dans ce paragraphe nous montrons que dans le cas particulier où V est le processus introduit dans la section 5.1 et $S = \tau = inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$, si $\sigma \neq 0$, il n'existe pas de $\mathcal{F}^V$-intensité.

Le processus Z étant de Lévy, d'après l'exercice 4 page 39 de [4], c'est un processus de Feller. Ainsi nous pouvons appliquer les résultats démontrés auparavant. Comme pour le cas d'un temps d'arrêt quelconque S, on décompose $\tau = \tau_1 \wedge \tau_2$ avec τ_1 un $\mathcal{F}^V$-temps d'arrêt prévisible et τ_2 $\mathcal{F}^V$-totalement inaccessible.

Remarque 6.2.14 *Le temps d'arrêt τ_2 coïncide avec un instant de saut T_n du processus de Poisson où $n \in \mathbb{N}^*$ est tel que $\tau = T_n$ et $Y_n \neq 0$, c'est à dire*

$$\forall \omega \quad \exists n(\omega) \ \textit{tel que} \quad \tau_2(\omega) = T_{n(\omega)}(\omega).$$

Proposition 6.2.15 *Soit $f_2 : \mathbb{R}_+ \times]b, \infty[\to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par*

$$f_2(t, x) = a\mathbb{E}_x \left(\mathbf{1}_{\tau > t} F_Y(ln \frac{b}{V_t}) \right).$$

Alors pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}_x(\tau_2 \leq t) = \int_0^t f_2(u, x) du$.

Preuve
La preuve est faite en deux étapes. Nous montrons d'abord que la fonction de répartition de τ_2 est dérivable en 0 à droite, ensuite qu'elle est dérivable en tout $t > 0$.

- *1-ère étape* $lim_{h \to 0} \frac{\mathbb{P}_x(\tau \leq h)}{h}$ existe et est égale à $aF_Y(ln\frac{b}{x})$.

On suit le même raisonnement que dans la preuve de la proposition 5.2.1. On décompose

$$\mathbb{P}_x(\tau_2 \leq h) = \mathbb{P}_x(\tau_2 \leq h, N_h = 0) + \mathbb{P}_x(\tau_2 \leq h, N_h = 1) + \mathbb{P}_x(\tau_2 \leq h, N_h \geq 2). \tag{6.8}$$

Le premier terme du membre droite de (6.8) est nul, puisque τ_2 coïncide avec un instant de saut du processus de Poisson (remarque 6.2.14) et $\frac{\mathbb{P}_x(\tau_2 \leq h, N_h \geq 2)}{h}$ est majoré par $\frac{\mathbb{P}_x(N_h \geq 2)}{h}$ qui tend vers 0 quand h tend vers 0.
Le deuxième terme du membre droite de (6.8) s'écrit :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(\tau_2 = T_1, N_h = 1) =& \mathbb{P}_x(\tau = T_1, \ Y_1 \neq 0, \ T_1 \leq h < T_2) \\
=& \mathbb{P}_0(\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > T_1, \ \bar{Z}_{T_1} + Y_1 \leq ln\frac{b}{x}, \ Y_1 \neq 0, \ T_1 \leq h < T_2) \\
=& \int_0^h ae^{-as_1} \int_{h-s_1}^{\infty} ae^{-as_2} \mathbb{E}_0(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > s_1} \mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_{s_1}} \mathbf{1}_{Y_1 \neq 0}) ds_2 ds_1 \\
=& ae^{-ah} \int_0^h \mathbb{E}_0[\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > s_1} \mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_{s_1}} \mathbf{1}_{Y_1 \neq 0}] ds_1.
\end{aligned}$$

Le terme $\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > s_1} \mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_{s_1}} \mathbf{1}_{Y_1 \neq 0}$ est positif, majoré par 1 et converge presque sûrement vers $\mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x}} \mathbf{1}_{Y_1 \neq 0}$ quand s_1 tend vers 0. D'après le théorème de convergence dominée

$$lim_{s_1 \to 0} \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\bar{\tau}_{ln\frac{b}{x}} > s_1} \mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x} - \bar{Z}_{s_1}} \mathbf{1}_{Y_1 \neq 0}) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x}} \mathbf{1}_{Y_1 \neq 0}).$$

Or $x > b$, donc $ln\frac{b}{x} < 0$ et $\mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x}} \mathbf{1}_{Y_1 \neq 0} = \mathbf{1}_{Y_1 \leq ln\frac{b}{x}}$, d'où $h \mapsto \mathbb{P}_x(\tau = T_1, N_h = 1)$ est une fonction dérivable en 0 de dérivée $aF_Y\left(ln\frac{b}{x}\right)$.

- *2ème étape* La fonction $t \mapsto \mathbb{P}_x(\tau_2 \leq t)$ est dérivable en tout $t > 0$ de dérivée

$a\mathbb{E}_x\left(\mathbf{1}_{\tau>t}F_Y(ln\frac{b}{V_t})\right)$.
Comme dans la preuve du théorème 5.2.5, on décompose

$$\mathbb{P}_x(t < \tau_2 \leq t+h) = \mathbb{P}_x(t < \tau_2 \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t = 0) + \mathbb{P}_x(t < \tau_2 \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t = 1) + \mathbb{P}_x(t < \tau_2 \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t \geq 2). \quad (6.9)$$

Le premier terme du membre droite de (6.9) est nul puisque τ_2 coïncide avec un instant de saut du processus de Poisson et $lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_x(t<\tau_2\leq t+h,\ N_{t+h}-N_t\geq 2)}{h} = 0$. En utilisant la propriété de Markov, le deuxième terme du membre droite de (6.9) s'écrit

$$\mathbb{P}_x(t < \tau_2 \leq t+h,\ N_{t+h} - N_t = 1) = \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{\tau_2>t}\mathbb{P}_{V_t}(\tau_2 \leq h,\ N_h = 1)).$$

D'après la première étape $\frac{\mathbb{P}_{V_t}(\tau_2\leq h,\ N_h=1)}{h}$ converge vers $a\mathbb{E}_{V_t}(\mathbf{1}_{Y_1\leq ln\frac{b}{V_t}})$ et est majoré par $\frac{\mathbb{P}_{V_t}(N_h=1)}{h} = ae^{-ah} \leq a$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée, d'où le résultat. □

Ainsi, les hypothèses du lemme 6.2.10 sont vérifiées. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 6.2.16 *Le temps d'arrêt τ_2 admet $\mathbf{1}_{\tau_2>t}aF_Y(ln\frac{b}{V_t})$ pour $\mathcal{F}^V$-intensité.*

Une conséquence du théorème 6.2.11 est la proposition suivante :

Proposition 6.2.17 *La $\mathcal{F}^V$-projection duale prévisible du processus $(H_t^\tau = \mathbf{1}_{\tau\leq t},\ t \geq 0)$ est égale à $\mathbf{1}_{\tau_1\leq t} + \int_0^t 1_{\tau_2>u}aF_Y(ln\frac{b}{V_u})du,\ t \geq 0$. De plus τ n'admet pas de $\mathcal{F}^V$-intensité.*

Remarque 6.2.18 *Si $m = \sigma = 0$, alors τ coïncide avec un instant de saut de N et il admet une $\mathcal{F}^V$-intensité égale à*

$$\lambda^V(t) = aF_Y(ln\frac{b}{V_t}),\ t \geq 0.$$

Dans ce cas, en utilisant d'abord la propriété de Markov et ensuite la dérivée en 0 de la fonction de répartition de τ (voir première étape de la preuve de la proposition 6.2.15), on a

$$lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}\left(t < \tau \leq t+h|\mathcal{F}_t^V\right)}{h} = \mathbf{1}_{\tau>t}lim_{h\to 0}\frac{\mathbb{P}_{V_t}(\tau \leq h)}{h} = \mathbf{1}_{\tau>t}aF_Y(ln\frac{b}{V_t}) = \mathbf{1}_{\tau>t}\lambda^V(t).$$

Cette égalité permet de donner une interprétation économique à λ^V. Supposons que, à chaque instant t, les actionnaires d'une entreprise sont complètement informés sur la valeur des actifs de la firme décrite par l'intermédiaire du processus V et que τ est l'instant de défaut de l'entreprise. Les actionnaires calculent la probabilité d'apparition du défaut en fonction de l'information dont ils disposent ; ainsi pour un instant Δh assez petit, la probabilité d'apparition du défaut entre t et $t + \Delta h$ est de l'ordre de $\mathbf{1}_{\tau>t}\lambda^V(t)\Delta h$.

D'après la proposition 6.2.17, la $\mathcal{F}^V$-projection duale prévisible du processus H^τ est égale à $A_t = \mathbf{1}_{\tau_1 \leq t} + \int_0^t 1_{\tau_2>u} aF_Y(ln\frac{b}{V_u})du,\ t \geq 0$. En utilisant la proposition 6.2.2, A peut être approché par des processus croissants construits explicitement à partir de H^τ :

Corollaire 6.2.19 *Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a, au sens de la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$:*

$$\mathbf{1}_{\tau_1 \leq t} + \int_0^t 1_{\tau_2>u} aF_Y(ln\frac{b}{V_u})du = lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\int_0^t \mathbf{1}_{\tau>s}\mathbb{P}_x(\tau \leq s+h|\mathcal{F}_s^V, \tau > s)ds.$$

6.2.2. Un cas où S n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt

Un cas intéressant où S n'est pas un $\mathcal{F}$-temps d'arrêt est celui quand $S = \tau$ et la filtration $\mathcal{F}$ est engendrée par une information bruitée.

Dans la suite nous plaçons dans le cas particulier où V est le processus introduit dans la section 5.1, $S = \tau = inf\{t \geq 0 : V_t \leq b\}$ et la filtration $\mathcal{F}$ (notée désormais $\mathcal{F}^Q$) est engendrée par un processus continu Q de la forme

$$Q_t = \int_0^t h(V_s)ds + B_t,\ t \geq 0$$

avec $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et $(B_t,\ t \geq 0)$ un mouvement brownien indépendant de $(W_t,\ t \geq 0)$, $(N_t,\ t \geq 0)$, $(Y_i,\ i \in \mathbb{N}^*)$. Dans ce cas τ n'est pas un $\mathcal{F}$ temps d'arrêt. La filtration $\mathcal{I}$ est ici $\mathcal{I} = \mathcal{F}^Q \vee \mathcal{F}^{H^\tau}$.

Ce modèle s'inspire du modèle de Duffie et Lando [27] où le processus V est un mouvement brownien géométrique et la filtration $\mathcal{F}$ est de la forme

$$\mathcal{F}_t = \sigma(\{Q_{t_1}, ..., Q_{t_n}; t_1 < ... < t_n \leq t\})$$

où $Q_{t_i} = ln\left(\frac{V_{t_i}}{V_0}\right) + U_i,\ i \in \mathbb{N}^*$ et $(U_i,\ i \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi gaussienne centrée réduite.

L'observation est de la forme $q_t = V_t + U_t$ avec U un bruit blanc. Comme il est équivalent d'observer $\sigma(q_s,\ s \leq t)$ ou $\sigma(\int_0^s q_u du,\ s \leq t)$, on considère plutôt que le processus observé est $(Q_t,\ t \geq 0)$,

$$Q_t = \int_0^t V_s ds + B_t,$$

où $(B_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien indépendant de $(V_t,\ t \geq 0)$.

Il s'agit d'un problème de filtrage et nous allons opérer par un changement de probabilité comme cela est habituel dans le cas du filtrage. C'est pourquoi nous prenons h une fonction borélienne bornée (au lieu de h l'identité).

Nous construisons d'abord un espace de probabilité filtré, produit des espaces associés aux deux mouvements browniens W, Q et au processus de Poisson composé (N, Y_i). Cet espace est muni d'une mesure de probabilité $\mathbb{P}^\circ$ dite de référence. Sur cet espace nous considérons les processus Q et V solutions d'un système stochastique différentiel. La probabilité "réelle" $\mathbb{P}$ est construite de façon absolument continue par rapport à $\mathbb{P}^\circ$, afin que, les processus Q et V vérifient sous $\mathbb{P}$ le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t = x + (m + \frac{\sigma^2}{2}) \int_0^t V_{s^-} ds + \sigma \int_0^t V_{s^-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) V_{s^-} N(ds, dy) \\ Q_t = \int_0^t h(V_s) ds + B_t, \ t \in \mathbb{R}_+ \end{array} \right. \tag{6.10}$$

où N est la mesure aléatoire associée aux sauts de V.

Soit $(\Omega^Q, \mathcal{F}^Q, (\mathcal{F}_t^Q)_{t\geq 0}, \mathbb{P}^Q)$ (respectivement $(\Omega^W, \mathcal{F}^W, (\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}, \mathbb{P}^W)$) un espace mesuré sur lequel nous considérons $\tilde{Q}$ (respectivement W) un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$. L'espace $(\Omega^N, \mathcal{F}^N, (\mathcal{F}_t^N)_{t\geq 0}, \mathbb{P}^N)$ est un espace mesuré sur lequel $(Y_i, \ i \in \mathbb{N}^*)$ est une suite de variable aléatoires indépendantes de fonction de répartition F_Y et N est une une mesure aléatoire de Poisson d'intensité $\Pi(dt, A) = a \int_A F_Y(dy) dt$ avec a une constante positive.

Nous définissons :

$\Omega = \Omega^Q \times \Omega^W \times \Omega^N, \qquad \mathcal{F}^{Q,W,N} = \mathcal{F}^Q \times \mathcal{F}^W \times \mathcal{F}^N$

$\mathbb{P}^\circ = \mathbb{P}^Q \otimes \mathbb{P}^W \otimes \mathbb{P}^N, \qquad \mathcal{F}_t^{Q,W,N} = \mathcal{F}_t^Q \otimes \mathcal{F}_t^W \otimes \mathcal{F}_t^N, \quad t \in \mathbb{R}_+.$

Sous $\mathbb{P}^\circ$, nous considérons le système d'équations différentielles stochastiques suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} V_t = x + (m + \frac{\sigma^2}{2}) \int_0^t V_{s^-} ds + \sigma \int_0^t V_{s^-} dW_s + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} (e^y - 1) V_{s^-} N(ds, dy) \\ Q_t = \tilde{Q}_t, \ t \in \mathbb{R}_+. \end{array} \right. \tag{6.11}$$

Remarque 6.2.20 *D'après la construction ci-dessus*
i) $(W, \ Q)$ *est un* $(\mathbb{P}^\circ, \ \mathcal{F}_\cdot^{Q,W,N})$*-mouvement brownien sur* $\mathbb{R}^2$*,*
ii) N *est une mesure ponctuelle de* $(\mathbb{P}^\circ, \ \mathcal{F}_\cdot^{Q,W,N})$*-intensité* $\Pi(dt, A) = a \int_A F_Y(dy) dt$*.*

Nous supposons que la fonction h vérifie l'hypothèse suivante :

Hypothèse 6.2.21 $\mathbb{E}^\circ \left(e^{\int_0^T h^2(V_s) ds} \right) < \infty$ *pour tout* $T > 0$*.*

L'hypothèse 6.2.21 est vérifiée, par exemple, dès que h est une fonction bornée.

Cette hypothèse assure l'existence de la dérivée de Radon Nykodim à horizon fini de la probabilité réelle $\mathbb{P}$ par rapport à la probabilité de référence $\mathbb{P}^\circ$. En fait pour que la dérivée de Radon Nykodim existe, il suffit d'imposer $\mathbb{E}^\circ \left(e^{\frac{1}{2} \int_0^T h^2(V_s) ds} \right) < \infty$, mais l'hypothèse 6.2.21 servira plus tard pour la construction des martingales de carré localement intégrable.

Nous construisons la probabilité $\mathbb{P}$ sous laquelle $(V, \ Q)$ suit le modèle (6.10). Nous définissons :

$$L_t = \exp \left(\int_0^t h(V_s) dQ_s - \frac{1}{2} \int_0^t h^2(V_s) ds \right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Pour tout $T > 0$, le processus $(L_{t\wedge T},\ t \in \mathbb{R}_+)$ est une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_{.}^{Q,W,N})$-martingale uniformément intégrable. Nous fixons T.

Le processus $(L_t,\ t \in [0,\ T])$ satisfait l'équation différentielle stochastique suivante

$$L_t = 1 + \int_0^t h(V_s) L_s dQ_s,\ t \in [0,\ T]$$

et L est l'exponentielle de Doléans du processus $(\int_0^t h(V_s)dQ_s,\ t \in [0,\ T])$.

Définition 6.2.22 *Soit la probabilité $\mathbb{P}$ définie sur $\mathcal{F}_T^{Q,W,N}$ par :*

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\circ} = L_T.$$

En fait ici $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^\circ$. Dans la suite nous ne préciserons pas si les calculs sont faits $\mathbb{P}$ ou $\mathbb{P}^\circ$-presque sûrement car les deux mesures sont équivalentes.

D'après le théorème de Girsanov, nous obtenons que $(W,\ B)$ est un $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_{.}^{Q,W,N})$-mouvement brownien sur $\mathbb{R}^2$ et N est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_{.}^{Q,W,N})$-mesure aléatoire de Poisson.

Nous rappelons qu'au temps d'arrêt τ est associé le processus $t \mapsto H^\tau = \mathbf{1}_{\tau \leq t}$ et $\mathcal{F}^{H^\tau}$ la filtration complétée càd, engendrée par ce procesus. Soit $\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau} = \mathcal{F}_t^Q \otimes \mathcal{F}_t^{H^\tau}$, $t \in [0,\ T]$. Une conséquence de la définition 6.2.22 est :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^\circ}\ |_{\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}} = \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}),\quad t \in [0,\ T].$$

Remarque 6.2.23 *En conditionnant par $\mathcal{F}_t^{V,Q}$ sous l'espérance on remarque que*

$$\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}) = \mathbb{E}^\circ(\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{V,Q})|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}) = \mathbb{E}^\circ(L_t|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}).$$

Par construction le processus $\Big(\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}),\ t \in [0,\ T]\Big)$ est une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_{.}^{Q,H^\tau})$-martingale uniformément intégrable. Sous l'hypothèse 6.2.21, cette martingale est de carré localement intégrable.

Quelle que soit la probabilité ($\mathbb{P}$ ou $\mathbb{P}^\circ$) et quelle que soit la filtration ($\mathcal{F}_{.}^{Q,H^\tau}$ ou $\mathcal{F}_{.}^{H^\tau}$), H^τ est un processus croissant, donc une sous-martingale et par conséquence une semimartingale. Nous nous proposons de déterminer sa $\mathbb{P}^\circ$-décomposition, puis sa $\mathbb{P}$-décomposition.

Proposition 6.2.24 *Sous l'hypothèse 5.1.1, le processus $t \mapsto H_t^\tau = 1_{\tau \leq t\wedge T}$ est une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_{.}^{Q,H^\tau})$-semimartingale de décomposition*

$$t \mapsto \mathbf{1}_{\tau \leq t\wedge T} = D_{t\wedge T} + \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau > u} \lambda_\tau(u) du$$

où $D_{.\wedge T}$ une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_{.}^{Q,H})$-martingale et λ_τ la fonction définie par

$$\lambda_\tau(u) = \frac{f_\tau(u,x)}{1 - F_\tau(u,x)},\ u \in \mathbb{R}_+.$$

Preuve
Le processus $t \mapsto H_t^\tau = 1_{\tau \leq t \wedge T}$ est une ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{H^\tau}$)-sousmartingale, donc une ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{H^\tau}$)-semimartingale (d'après le théorème 2.18 page 32 de [37]). D'après le théorème de décomposition de Doob,

$$H^\tau = D + A$$

où D est une ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{H^\tau}$)-martingale et A un processus croissant, ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{H^\tau}$)-prévisible et $A_0 = 0$. De plus cette décomposition est unique.

Comme sous $\mathbb{P}^\circ$, Q est indépendant de H^τ, alors H^τ est aussi une ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$)-semimartingale, D une ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$)-martingale et A un processus croissant, ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$)-prévisible et $A_0 = 0$. En fait la ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}^{H^\tau}$)-décomposition et la ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}^{Q,H^\tau}$)-décomposition du processus H^τ coïncident.

La ($\mathbb{P}$, $\mathcal{F}_\cdot^{H^\tau}$)-intensité λ_τ existe d'après la proposition 6.1.8. La loi de τ sous $\mathbb{P}$ étant égale à la loi de τ sous $\mathbb{P}^\circ$, λ_τ est aussi la ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{H^\tau}$)-intensité. En utilisant l'indépendance de H^τ et Q sous $\mathbb{P}^\circ$, le processus $t \mapsto \mathbf{1}_{\tau \leq t \wedge T} - \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau > u} \lambda_\tau(u) du$ est une ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$)-martingale.

Le processus $t \mapsto \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau > u} \lambda_\tau(u) du$ est ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$)-adapté. C'est un processus continu, donc ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$)-prévisible et nul en 0. Ainsi la ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$)-décomposition de la semimartingale $t \mapsto H_t^\tau = 1_{\tau \leq t \wedge T}$ est

$$t \mapsto \mathbf{1}_{\tau \leq t \wedge T} = D_{t\wedge T} + \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau > u} \lambda_\tau(u) du$$

où $D_{\cdot\wedge T}$ une ($\mathbb{P}^\circ$, $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H}$)-martingale. $\square$

Pour trouver la $\mathbb{P}$-décomposition de la semimartingale H^τ on utilise les deux résultats suivants démontrés dans [38].

Théorème 6.2.25 *(théorème 3.11 page 168 de [38])*
Soit $\mathbb{P} <<^{loc} \mathbb{P}^\circ$ et Z le processus densité. Si M est une $\mathbb{P}^\circ$-martingale locale vérifiant les deux conditions suivantes :
(1)$M_0 = 0$,
(2) $[M, Z]$ est à variation $\mathbb{P}^\circ$-localement intégrable,
alors le processus

$$M' = M - \frac{1}{Z_-}. < M, Z >$$

est $\mathbb{P}$-presque sûrement bien défini et il est une $\mathbb{P}$-martingale locale.

Lemme 6.2.26 *(lemme 3.14 page 169 de [38])*
Soit Z et M deux $\mathbb{P}^\circ$-martingales locales telles que $|\Delta M| \leq a$ avec a une constante. Alors $[M, Z]$ est à variation $\mathbb{P}^\circ$-localement intégrable.

Proposition 6.2.27 *Sous les hypothèses 5.1.1 et 6.2.21, le processus* $t \mapsto H_t^\tau = 1_{\tau \leq t \wedge T}$ *est une* $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_{.}^{Q,H^\tau})$*-semimartingale de décomposition*

$$t \mapsto \mathbf{1}_{\tau \leq t \wedge T} = D'_{t\wedge T} + A'_{t\wedge T}$$

où

$$\begin{aligned} D'_{.\wedge T} =& D_{.\wedge T} - \int_0^{.\wedge T} \frac{1}{(\mathbb{E}^\circ(L_.|\mathcal{F}_.^{Q,H^\tau}))_{s^-}} d < D, \mathbb{E}^\circ(L_s|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_s \quad \textit{est une } (\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})\textit{-martingale et} \\ A'_{.\wedge T} =& \int_0^{.\wedge T} \mathbf{1}_{\tau > u}\lambda_\tau(u)du + \int_0^{.\wedge T} \frac{1}{(\mathbb{E}^\circ(L_.|\mathcal{F}_.^{Q,H^\tau}))_{s^-}} d < D, \mathbb{E}^\circ(L_s|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_s \quad \textit{est un processus} \end{aligned}$$

$(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$*-prévisible croissant, nul en* 0.

Preuve
Le processus H^τ étant une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$-semimartingale, c'est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$-semimartingale puisque $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^\circ$ sont équivalentes.

La martingale D a un seul saut de taille égale à 1 ; d'après le lemme 6.2.26, $[D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau})]$ est à variation $\mathbb{P}^\circ$-localement intégrable. Ainsi on peut appliquer le théorème 6.2.25 et $t \mapsto D_{t\wedge T} - \int_0^{t\wedge T} \frac{1}{(\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_.^{Q,H^\tau}))_{s^-}} d < D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_s$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$-martingale. Ainsi la décomposition de la $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$-sous-martingale H^τ est $H^\tau = D' + A'$ avec

$$\begin{aligned} D'_{t\wedge T} =& D_{t\wedge T} - \int_0^{t\wedge T} \frac{1}{(\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_.^{Q,H^\tau}))_{s^-}} d < D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_s \quad \text{et} \\ A'_{t\wedge T} =& \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau > u}\lambda_\tau(u)du + \int_0^{t\wedge T} \frac{1}{(\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_.^{Q,H^\tau}))_{s^-}} d < D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_s, \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

D'après la remarque 6.2.23, pour tout $t \leq T$, $\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}) = \mathbb{E}^\circ(L_t|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau})$, ainsi on retrouve la forme de D' (respectivement A') de l'énoncé de la proposition.

Le processus A' est nul en 0, croissant, continu et $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$-adapté, donc prévisible. On conclut avec l'unicité de la décomposition de Doob. □

Le lemme suivant est un outil qui permet de simplifier la $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$-décomposition de la semimartingale H^τ.

Lemme 6.2.28 *Sous l'hypothèse 6.2.21,*
1) Pour tout $\mathcal{F}^{Q,H^\tau}$*-temps d'arrêt* S *tel que* $S \leq T$ *presque sûrement, le crochet* $< D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_S$ *est nul sous* $\mathbb{P}^\circ$*,*
2) $D_{.\wedge T}$ *est une* $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_.^{Q,H^\tau})$*-martingale.*

Preuve
Les processus $(\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}),\ t \in [0,\ T])$ et $(D_t,\ t \in [0,\ T])$ sont des $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingales de carré localement intégrable (en fait D est une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_\cdot^{H^\tau})$-martingale, mais d'après l'indépendance des processus H^τ et Q sous $\mathbb{P}^\circ$, c'est aussi une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale).

Par définition du crochet (théorème 4.2 page 38 de [38]), $< D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >$ est le processus $\mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau}$-prévisible, à variation bornée, nul en 0 tel que le processus

$$\left(D_t\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}) - < D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_t,\ t \in [0,\ T]\right)$$

soit une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale nulle en 0. Ainsi pour tout $\mathcal{F}^{Q,H^\tau}$-temps d'arrêt S tel que $S \leq T$:

$$\mathbb{E}^\circ\left(D_S\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_S^{Q,H^\tau})\right) = \mathbb{E}^\circ(< D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_S).$$

En enlevant le conditionnement sous l'espérance et ensuite en conditionnant par $\mathcal{F}_S^{H^\tau}$ on obtient :

$$\mathbb{E}^\circ\left(D_S\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_S^{Q,H^\tau})\right) = \mathbb{E}^\circ(D_S L_T) = \mathbb{E}^\circ\left(D_S\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_S^{H^\tau})\right).$$

Or d'après le corollaire 6.1.9, D est aussi une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_\cdot^{H^\tau})$-martingale. Ainsi en utilisant la proposition 3.8 page 168 de [38], $D_\cdot\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_\cdot^{H^\tau})$ est une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_\cdot^{H^\tau})$-martingale. La martingale D étant nulle en 0

$$\mathbb{E}^\circ\left(D_S\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_S^{H^\tau})\right) = 0 \ \text{ d'où } \ \mathbb{E}^\circ(< D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_S) = 0 \text{ pour tout } \ S \leq T.$$

En utilisant le lemme 1.44 page 11 de [38], le processus $(< D, \mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}^{H,Q}) >_t,\ t \in [0,\ T])$ est aussi une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale, donc il est nul sous $\mathbb{P}^\circ$. Par conséquent, le processus $\left(D_t\mathbb{E}^\circ(L_T|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}),\ t \in [0,\ T]\right)$ est une $(\mathbb{P}^\circ,\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale. En utilisant la proposition 3.8 page 168 de [38], nous en déduisons que $(D_t,\ t \geq 0)$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale. □

Le lemme 6.2.28 et de la proposition 6.2.27 montrent l'identité de deux décomposition sous $\mathbb{P}$ et $\mathbb{P}^\circ$:

Proposition 6.2.29 *Sous les hypothèses 5.1.1 et 6.2.21, la $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{Q,H^\tau})$-décomposition de la semimartingale $t \mapsto \mathbf{1}_{\tau \leq t\wedge T}$ est*

$$t \mapsto \mathbf{1}_{\tau \leq t\wedge T} = D_{t\wedge T} + \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau > u}\lambda_\tau(u)du.$$

Donc le processus D est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale locale.

Preuve
D'après le lemme 6.2.28, le processus $D_{.\wedge T}$ est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{Q,H^\tau}_{.})$-martingale. De plus le processus $t \mapsto \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau>u}\lambda_\tau(u)du$ est un processus croissant, nul en 0, $\mathcal{F}^{Q,H^\tau}_{.}$-adapté et continu, donc $\mathcal{F}^{Q,H^\tau}_{.}$-prévisible . Ainsi, la $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{Q,H^\tau}_{.})$-décomposition de la semimartingale H^τ est

$$t \mapsto \mathbf{1}_{\tau\leq t\wedge T} = D_{t\wedge T} + \int_0^{t\wedge T} \mathbf{1}_{\tau>u}\lambda_\tau(u)du.$$

De plus cette décomposition est unique ; le processus

$$t \mapsto \int_0^{t\wedge T} \frac{1}{(\mathbb{E}^\circ(L_.|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}_{.}))_{s^-}} d < D, \mathbb{E}^\circ(L_s|\mathcal{F}^{Q,H^\tau}) >_s$$

de la proposition 6.2.27 est, par conséquent, nul. □

Soit $T > 0$. On introduit Δ_T l'ensemble des $\mathcal{F}^{Q,H^\tau}$-temps d'arrêt S vérifiant $\mathbb{P}(S \leq T) = 1$. D'après l'exercice 5.19 page 36 de [44], pour montrer que D est une "vraie" $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{Q,H^\tau}_{.})$-martingale, il suffit de vérifier qu'elle est de classe DL (c'est à dire que l'ensemble des variables aléatoires D_S, $S \in \Delta_T$ est uniformément intégrable pour tout $0 < T < \infty$).

Proposition 6.2.30 *Sous les hypothèse 5.1.1 et 6.2.21, le processus* $t \mapsto D_t = \mathbf{1}_{\tau\leq t} - \int_0^t \mathbf{1}_{\tau>u}\lambda_\tau(u)du$ *est une* $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{Q,H^\tau}_{.})$*-martingale.*

Preuve
Soit $0 < T < \infty$, $S \in \Delta_T$ et $b < x$.

$$|D_S| \leq |\mathbf{1}_{\tau\leq S}| + \left|\int_0^S \mathbf{1}_{\tau>u}\frac{f_\tau(u,x)}{1-F_\tau(u,x)}du\right|.$$

Les deux indicatrices sont majorées par 1 et l'intégrant du deuxième terme est positif.

$$|D_S| \leq 1 + \int_0^S \frac{f_\tau(u,x)}{1-F_\tau(u,x)}du.$$

La fonction $f_\tau(.,x)$ est la dérivée en u de la fonction de répartition de τ.

$$\int_0^S \frac{f_\tau(u,x)}{1-F_\tau(u,x)}du = \int_0^S \frac{F'_\tau(u,x)}{1-F_\tau(u,x)}du = -ln(1-F_\tau(S,x)) \leq -ln(1-F_\tau(T,x))$$

car la fonction $t \mapsto F_\tau(t,x)$ est croissante.
D'après la proposition 6.1.8, $1-F_\tau(T,x) > 0$ pour tout $T > 0$ et le terme $-ln(1-F_\tau(T,x))$ est fini. Ainsi pour tout $S \in \Delta_T$, $|D_S| \leq 1 - ln(1-F_\tau(T,x))$ et D est de classe DL. On conclut avec l'exercice 5.19 page 36 de [44]. □

En utilisant la proposition 6.2.30, on peut conclure avec le résultat suivant :

Proposition 6.2.31 *Sous l'hypothèse 5.1.1, si la fonction h vérifie l'hypothèse 6.2.21 (en particulier si h est une fonction bornée), alors τ admet pour $(\mathbb{P}, \mathcal{F}^Q)$-intensité la fonction déterministe λ_τ définie par*

$$\lambda_\tau(t) = \frac{f_\tau(t,x)}{1 - F_\tau(t,x)}, \quad t \geq 0,$$

où F_τ est la fonction de répartition de τ et f_τ sa dérivée obtenue dans le théorème 5.2.5.

Nous pouvons généraliser ce résultat au cas où la fonction h est à croissance au plus linéaire. Dans ce cas, τ admet aussi une $(\mathbb{P}, \mathcal{F}^Q)$ intensité.

Proposition 6.2.32 *Sous l'hypothèse 5.1.1, supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\mathbb{E}(e^{\alpha Y}) < +\infty$. Supposons de plus que la fonction $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à croissance au plus linéaire :*

$$\exists C > 0 \text{ tel que } |h(x)| \leq C(1+x), \quad x \in \mathbb{R}_+.$$

Alors τ admet pour $(\mathbb{P}, \mathcal{F}^Q)$-intensité la fonction déterministe λ_τ définie par

$$\lambda_\tau(t) = \frac{f_\tau(t,x)}{1 - F_\tau(t,x)}, \quad t \geq 0.$$

La preuve de cette proposition repose sur le lemme suivant :

Lemme 6.2.33 *Supposons qu'il existe $\alpha > 1$ tel que $\mathbb{E}(e^{\alpha Y}) < +\infty$. A $n \in \mathbb{N}$, on associe la fonction $h_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $h_n(.) = h(. \wedge n)$ et le processus Q_n défini par*

$$Q_n(t) = \int_0^t h_n(V_s)ds + B_t, \quad t \geq 0.$$

La suite Q_n converge dans $L^1(\Omega \times [0,T], \mathbb{P}_x \otimes ds)$ vers Q pour tout $T > 0$. De plus, la convergence a lieu aussi presque sûrement au sens des marginales fini-dimensionnelles de la suite extraite Q_{n^p} avec $p(\alpha - 1) > 1$, $p \in \mathbb{N}$.

Preuve
D'après les définitions de Q_n et Q, pour tout $t > 0$,

$$Q_n(t) - Q(t) = \int_0^t (h(n) - h(V_s))\,\mathbf{1}_{V_s \geq n} ds.$$

En utilisant l'hypothèse de croissance au plus linéaire de la fonction h, l'inégalité de Hölder, puis l'inégalité de Markov, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left(\int_0^T |Q_n(t)-Q(t)|dt\right) \leq & C\int_0^T\int_0^t \mathbb{E}_x((2+n+V_s)\mathbf{1}_{V_s\geq n})dsdt \\
= & C\int_0^T\int_0^t \left[(2+n)\mathbb{P}_x(V_s\geq n)+\mathbb{E}_x\left(V_s\mathbf{1}_{V_s\geq n}\right)\right]dsdt \\
\leq & C\int_0^T\int_0^t \left[(2+n)\mathbb{P}_x(V_s\geq n)+\mathbb{E}_x(V_s^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\mathbb{P}_x(V_s\geq n)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}\right]dsdt \\
\leq & C\int_0^T\int_0^t \left[\frac{2+n}{n^\alpha}\mathbb{E}_x\left(V_s^\alpha\right)+\frac{1}{n^{\alpha-1}}\mathbb{E}_x\left(V_s^\alpha\right)\right]dsdt.
\end{aligned}$$

Or

$$\mathbb{E}_x(V_s^\alpha)=x^\alpha e^{\psi(\alpha)s} \quad \text{où} \quad \psi(v)=mv+\frac{\sigma^2v^2}{2}+a\mathbb{E}\left(e^{vY}-1\right).$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left(\int_0^T |Q_n(t)-Q(t)|dt\right) \leq & C\int_0^T\int_0^t \left[\frac{(2+n)x^\alpha}{n^\alpha}+\frac{x^\alpha}{n^{\alpha-1}}\right]e^{\psi(\alpha)s}dsdt \\
= & Cx^\alpha\frac{(2+2n)}{\psi(\alpha)n^\alpha}\int_0^T\left(e^{\psi(\alpha)t}-1\right)dt.
\end{aligned}$$

La convergence L^1 s'en déduit facilement en faisant tendre n vers infini. En choisissant $p(\alpha-1)>1$ et en utilisant le lemme de Borel Cantelli, nous obtenons que pour tout $l\in\mathbb{N}^*$, tout l-uplet $(t_1,...t_l)$, la suite extraite $(Q_{n^p}(t_1),...,Q_{n^p}(t_l))$ converge presque sûrement vers $(Q(t_1),...,Q(t_l))$. □

Preuve de la proposition 6.2.32
Il suffit de vérifier que le processus D défini par

$$D_t=\mathbf{1}_{\tau\leq t}-\int_0^t \mathbf{1}_{\tau>u}\lambda_\tau(u)du, \quad t\geq 0$$

est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale.

Nous rappelons que $\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}=\bigcap_{s>t}\mathcal{F}_s^Q\vee\mathcal{F}_s^{H^S}$ pour tout $t\geq 0$, $\mathcal{F}^Q$ est la filtration engendrée par le processus Q de la forme $Q_t=\int_0^t h(V_s)ds+B_t$ avec h une fonction à croissance au plus linéaire.

Soit $s>t>0$, $l\in\mathbb{N}^*$, un $(l+1)$-uplet $(t_0,t_1,...t_l)$ de $[0,t]$ et $\Phi\ :\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée. En utilisant le théorème de convergence dominée et le lemme 6.2.33 :

$$\mathbb{E}\left(D_s\Phi\left(Q(t_1),...,Q(t_l)\right)\mathbf{1}_{\tau\leq t_0}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(D_s\Phi\left(Q_{n^p}(t_1),...,Q_{n^p}(t_l)\right)\mathbf{1}_{\tau\leq t_0}\right).$$

D'après la proposition 6.2.30, D est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}^{Q_{n^p},H^\tau})$ martingale pour tout n et p :

$$\mathbb{E}\left(D_s\Phi\left(Q(t_1),...,Q(t_l)\right)\mathbf{1}_{\tau\leq t_0}\right)=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\left(D_t\Phi\left(Q_{n^p}(t_1),...,Q_{n^p}(t_l)\right)\mathbf{1}_{\tau\leq t_0}\right).$$

En utilisant à nouveau le théorème de convergence dominée,

$$\mathbb{E}\left(D_s\Phi\left(Q(t_1),...,Q(t_l)\right)\mathbf{1}_{\tau\leq t_0}\right)=\mathbb{E}\left(D_t\Phi\left(Q(t_1),...,Q(t_l)\right)\mathbf{1}_{\tau\leq t_0}\right).$$

Les variables aléatoires de la forme $\Phi(Q(t_1),...,Q(t_l))\mathbf{1}_{\tau\leq t_0}$, avec $l\in\mathbb{N}^*$, un $(l+1)$-uplet $(t_0,t_1,...t_l)$ de $[0,t]$ et $\Phi\ :\mathbb{R}^l\to\mathbb{R}$ une fonction mesurable bornée, engendrent la tribu $\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}$; donc

$$\mathbb{E}\left(D_s|\mathcal{F}_t^{Q,H^\tau}\right)=D_t,$$

c'est à dire D est une $(\mathbb{P},\ \mathcal{F}_\cdot^{Q,H^\tau})$-martingale. $\square$

Bibliographie

[1] L. ALILI, P. PATIE, J.L. PEDERSEN, "Representations of the First Hitting Time Density of an Ornstein-Uhlenbeck Process", Stochastic Models 21, 2005, pp. 967-980.

[2] L. BACHELIER, "Théorie de la spéculation", Université de Sorbonne, 1900.

[3] P. BARBE, M. LEDOUX, "Probabilités", De la Licence à l'Agrégation. Editions Espaces 34, Belin, 1998.

[4] J. BERTOIN, "Lévy Processes", Cambridge University Press, 1996.

[5] T. BIELECKI, M. RUTKOWSKI, "Credit Risk : Modeling, Valuation and Hedging", Springer, Berlin, 2002.

[6] F. BLACK, M.S. SCHOLES, "The valuation of option contracts and a test of market efficiency", Journal of Finance, 27(2), 1972, pp. 399-418.

[7] F. BLACK, M.S. SCHOLES, "The pricing of options and corporate liabilities", Journal of political Economy, 81(3), 1973, pp. 637-654.

[8] C. BLANCHET, "Processus à sauts et risque de défaut", thèse, Université d´Evry-Val d´Essonne, 2001.

[9] K.A. BREKKE, B.K. OKSENDAL, "Optimal switching in a economic activity under uncertainty", SIAM Journal on Control and Optimisation, 32, 4, 1994, pp. 1021-1036.

[10] A. BORODIN, P. SALMINEN, "Handbook of Brownian Motion. Facts and Formulae", Birkhäuser, 1996.

[11] S. BOYARCHENKO, S. LEVENDORSKII, "Barrier options and touch-and-out options under regular Lévy processes of exponential type", Annals of Applied Probability, 12 :4, 2002, pp. 1261-1298.

[12] S. BOYARCHENKO, S. LEVENDORSKII, "Non-Gaussian Merton-Black-Scholes Theory", World Scientific : River Edge, NJ, 2002.

[13] J. CARRIERE, "Valuation of the early-exercice price for derivative securities using simulations and splines", Insurance : Mathematics and Economics, 19, 1996, pp. 19-30.

[14] U. CETIN, R. JARROW, P. PROTTER, Y. YILDIRIM, "Modeling Credit Risk with Partial Information", Annals of Applied Probability, 14, 2004, pp.1167-1178.

[15] T. CHAN, A.E. KYPRIANOU, "Smoothness of scale functions for spectrally negative Lévy processes", Working Paper, 2000.

[16] N. CHEN, S. KOU, "Credit spreads, optimal capital structure, and implied volatility with endogenous default and jump risk", Working Paper, Columbia University, 2005.

[17] C.S. CHOU, P.A. MEYER, "Sur la répresentation des martingales commes intégrales stochastiques dans les processus ponctuels", Lecture Notes in Math. 465, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1975, pp. 226-236.

[18] D. COCULESCU, "Evaluation d'actifs et politiques optimales de la firme en présence de risque de défaut", thèse, Université Paris Dauphine, 2006.

[19] R. CONT, P. TANKOV, "Financial Modelling with Jump Processes", Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series, 2004.

[20] O. LE COURTOIS, F. QUITTARD-PINON, "The capital structure from the point of view of investitors and managers. An analysis with jump processes", Working Paper, 2004.

[21] B. DAO, "Approche structurelle du risque de crédit avec des processus mixtes diffusion-sauts", thèse, Université Paris-Dauphine, 2005.

[22] M.H.A. DAVIS, M. ZERVOS, "A problem of singular stochastic control with discretionary stopping", The Annals of Applied Probability, vol 4-1, 1994, pp. 226-240.

[23] J.P. DECAMPS, S.VILLENEUVE, "Optimal dividends policy and growth option", Working Paper, 2006.

[24] C. DELLACHERIE, "Un exemple de la théorie générale des processus", Lecture Notes in Math. 124, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1970, pp. 60-70.

[25] C. DELLACHERIE, "Capacités et processus stochastiques", Springer-Verlang Berlin Heidelberg Nex York, 1972.

[26] C. DELLACHERIE, P.-A. MEYER, "Probabilités et potentiel. Théorie des martingales", chapitres V à VIII, Hermann, Paris, 1980.

[27] D. DUFFIE, D. LANDO, "Term structure of credit spreads with incomplete accounting information", Econometrica, Vol. 69, 2001, pp. 633-664.

[28] D. DUFFIE, K.J. SINGLETON, "Modeling Term Structures of Defaultable Bonds", Review of Financial Studies. Special 1999, 12(4), 1999, pp.687-720.

[29] R.J. ELLIOTT, M. JEANBLANC, M. YOR, "On models of default risk", Math. Finance 10, 2000, pp. 179-196.

[30] D. J. EMERY, "Exit problem for a spectrally positive process", Adv. Appl. Prob. 5, 1973, pp. 498-520.

[31] J.C. GABILLON, "Le risque de taux de la dette risquée", Working paper, ESCT, 2003.

[32] K. GIESECKE L. GOLDBERG, "Forecasting Default in the Face of Uncertainty", Working Paper, Cornell University, 2003.

[33] X. GUO, R. JARROW, Y. ZENG, "Information reduction in credit risk models", Working Paper, 2005.

[34] X. GUO, H. PHAM, "Optimal partially reversible investment with entry decision and general production function", Stochastic Processes and their Applications, 2005.

[35] B. HILBERINK, L.C.G. ROGERS, "Optimal capital structure and endogenous default", Finance and Stochastics, 2002, pp. 237-263.

[36] J.C. HULL, A. WHITE, "The impact of default risk on the prices of options and other derivative securities", J. Bank. Finance 19, 1995, pp. 299-322.

[37] J. JACOD, "Calcul stochastique et problèmes de martingales", Lecture Notes in Math. 714, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1979.

[38] J. JACOD, A.N. SHIRYAEV, "Limit Theorems for Stochastic Processes", Springer Verlag Berlin Heidelberg New York, 2003.

[39] R.A. JARROW, S.M. TURNBULL, "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk", Journal of Finance, 50, 1995, pp. 53-85.

[40] R.A. JARROW, D. LANDO, S.M. TURNBULL, "A Markov model for the term structure of credit risk spreads", Review of Financial Studies, 10, 1997, pp. 481-523.

[41] M. JEANBLANC, "Cours de calcul stochastique. DESS IM EVRY. Option Finance", 2002.

[42] M. JEANBLANC, M. RUTKOWSKI, "Modelling of Default Risk : Mathematical tools", Mathematical Finance : theory and practice. Modern Mathematics Series, High education Press, 2000.

[43] T. JEULIN, M. YOR, "Grossissement d'une filtration et semi-martingales : formules explicites", Lecture Notes in Math. 649, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New-York, 1978, pp. 78-97.

[44] I. KARATZAS, S.E. SHREVE, "Brownian Motion and Stochastic Calculus", Second Edition, Springer-Verlag, New-York, 1991.

[45] I. KARATZAS, S.E. SHREVE, "Methods of Mathematical Finance", Springer, 1998.

[46] N. EL KAROUI, "Les Aspects Probabilistes du Contrôle Stochastique", Lecture Notes in Mathematics 876, Springer-Verlag, Berlin, 1981, pp. 73-238.

[47] N. EL KAROUI, J.-P. LEPELTIER, A. MILLET, "A probabilistic approach of the reduite", Probab. Math. Statist. 13, no 1, 1992, pp. 97-121.

[48] R. KORN, "Portofolio optimisation with strictly positive transaction costs and impulse control", Finance and Stochastics. 2, 1998, pp.85-114.

[49] S.G. KOU, HUI WANG, "First passage times of a jump diffusion process", Adv. Appl. Prob. 35, 2003, pp. 504-531.

[50] S.G. KOU, HUI WANG, "Option pricing under a double exponential jump diffusion model", Management Science, 2004, pp. 1178-1192.

[51] S. KUSUOKA, "A remark on default risk models", Advances in Mathematical Economics 1, 1999, pp. 69-82.

[52] A. E. KYPRIANOU, "Introductory Lectures on Fluctuations of Lévy Processes with Applications", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2006.

[53] B. LAMBRECHT, W. PERRAUDIN, "Creditor races and contingent claims", European Economic Review 40, 1996, pp. 897-907.

[54] D. LANDO, "Three Essays on Contigent Claim Pricing", Ph. D. dissertation, Cornell University, 1994.

[55] D. LANDO, "Modelling bonds and derivatives with default risk", Working Paper, 1996.

[56] D. LANDO, "On Cox processes and credit risky securities", Review of Derivatives Research, 2, 1998, pp. 99-120.

[57] B. LEBLANC, "Modélisation de la volatilité d'un actif financier et applications", thèse, Université Paris VII, 1997.

[58] H. LELAND, "Corporate debt value, bond convenants, and optimal capital structure", Journal of Finance 49, 1994, pp. 1213-1252.

[59] H. LELAND, "Agency costs, risk management, and capital structure", Journal of Finance, August 1998, pp. 1213-1243.

[60] H. LELAND, K. TOFT, "Optimal capital structure, endougenous bankruptcy, and the term strucure", Journal of Finance, 1996, pp. 987-1019.

[61] D. LÉPINGLE, A. MÉMIN, "Sur l'uniforme intégrabilité des martingales exponentielles", Zeit. für Wahrsche. Theory, 42(3), 1978, pp. 175-203.

[62] R. LITTERMAN, T. IBEN, "Corporate bond valuation ant the term structure of credit spreads", ZJ. Portofolio Management 17(3), 1991, pp. 52-64.

[63] F. LONGSTAFF, E. SCHWARTZ, "Valuing American options by simulation : a simple least-squares approach", Rev. Fin. Studies, 14, 2001, pp. 113-147.

[64] C. LOTZ, "Locally minimizing the credit risk", Working paper, Université de Bonn, 1998.

[65] C. LOTZ, "Optimal shortfall hedging of credit risk", Working paper, Université de Bonn, 1999.

[66] D. MADAN, H. UNAL, "Pricing the risk of default", Rev. Derivatives Research 2, 1995, pp. 121-160.

[67] R. C. MERTON, "On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rates", The Journal of Finance, 29, May 1974, pp. 449-70.

[68] P.-A. MEYER, "Probabilités et potentiel", Hermann, 1966.

[69] E. MORDECKI, "Optimal stopping for a diffusion with jumps", Finance and Sto., 3, 1999, pp. 227-236.

[70] R.S. PINDYCK, "The optimal exploration and production of non-renewable resources", Journal of Political Economy, 86, 1978, pp. 841-862.

[71] H. PHAM, "Optimal stopping, free boundary and American option in a jump-diffusion model", Applied math.Optimization, 35, 1997, pp. 145-164.

[72] H. PHAM, "Optimal stopping of controlled jump-diffusion processes : A viscosity solution approach", Journal of Mathematical Systems Estimation and Control, 8, 1998, pp. 1-27.

[73] P. PROTTER, "Stochastic Integration and Differential Equations", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1990.

[74] G. PYE, "Gauging the defaul premium", Finan. Analysts J. 30(1), 1974, pp.49-52.

[75] R. RADNER, L. SHEPP, "Risk vs. Profit Pontential : A Model of Corporate Strategy", Journ. of Econ. Dyn. and Cont. 20, 1990, pp. 1373-1393.

[76] D. REVUZ, M.YOR, "Continuous martingales and Brownian motion", Springer-Verlag, third edition, 1999.

[77] L.C.G. ROGERS, D. WILLIAMS, "Diffusions, Markov Processes and Martingales", vol. 2, John Wiley & Sons, 1987.

[78] K.I. SATO, "Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions", Cambridge University Press : Cambridge, UK, 1999.

[79] S.M. SHECHTER, M.D. BAILEY, A.J. SCHAEFER, M.S. ROBERTS, "The Optimal Time to Initiate HIV Therapy under Ordered Health States", Working Paper, 2006.

[80] A. SEPP, "Analytical Pricing of Double-Barrier Options under a Double-Exponential Jump Diffusion Process : Applications of Laplace Transform", International Journal of Theoretical and Applied Finance, Vol.7, No. 2, March 2004, pp. 151-175.

[81] A.N. SHIRYAEV, "Optimal Stopping Rules", Springer-Verlag, New-York, 1978.

[82] S. SONG, "A remark on a result of Duffie and Lando", Working paper, 1998.

[83] C.S. TAPIERO, "Applied Stochastic Models and Control in Management", North-Holland, Amsterdam, 1988.

[84] V. L. VATH, H. PHAM, S. VILLENEUVE, "A mixed singular/switching control problem for a dividend policy with reversible technology investment", Working Paper, 2006.

[85] S. VILLENEUVE, "On the threshold strategies and smooth-fit principle for optimal stopping problem", à paraître dans Journal of Applied Probability, 2007.

[86] D. WILLIAMS, "Diffusions, Markov Processes and Martingales", vol.1 : Foundations, Wiley Series in Probability and Mathematical Statisticsand, New-York, 1979.

[87] M. YOR, L. NGUYEN-NGOC, "Wiener-Hopf factorization and pricing of barrier and lookback options under general Lévy processes", Handbook of Financial Econometrics, 2002.

Author : Diana DOROBANTU

Title : Modeling Default Risk

Abstract : In the first part of this thesis, we study some optimal stopping time problems of the form :

$$sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[g(V_\tau)\right] \text{ or } sup_{\tau\in\Delta,\tau\geq 0}\mathbb{E}_v\left[e^{-r\tau}\bar{g}(V_\tau)\right], \tag{6.12}$$

where V is a stochastic process, g and $\bar{g}$ two Borelian functions, $r > 0$ and Δ is the set of $\mathcal{F}^V_.$-stopping times ($\mathcal{F}^V$ being the filtration generated by the process V). These problems can be applied in Finance, Economy or Medicine.

In the first part of this thesis we show that sometimes the smallest optimal stopping time of (6.12) is a hitting time. That's why, in the second part we study the hitting time law of a Lévy jump process. Some applications to finance are given : we compute the intensity of this stopping time associated with some filtration $\mathcal{F}$. Two cases are presented : when the stopping time is a $\mathcal{F}$-stopping time and when it is not.

Keywords : default risk, optimal stopping, Lévy processes, Feller processes, hitting time, intensity.